数字信号处理精编复习笔记目录

第一章 时域离散信号和系统.....1
第二章 时域离散信号和系统的频域分析.....5
第三章 离散傅里叶变换(DFT)及其快速算法(FFT).....13
第四章 模拟信号数字处理.....26
第五章 数字滤波器的基本概念及一些特殊滤波器.....32
第六章 IIR 数字滤波器设计.....37
第七章 FIR 数字滤波器设计.....51
第八章 时域离散系统的实现.....61
第九章 多采样率数字信号处理.....63

西电通院复试mcw9i9cet
西电通院电院AI考研Q群:680630306

第一章 时域离散信号和系统

一、学习要点

（1）关于信号：

①模拟信号，时域离散信号，数字信号三者之间的区别

②如何由模拟信号产生时域离散信号

③常用的时域离散信号

④如何判断信号是周期性的，其周期如何计算

（2）关于系统：

①什么是系统的线性，时不变性，以及因果性，稳定性；如何判断

②线性时不变系统输入和输出之间的关系：求解线性卷积的图解法，列表法，解析法。

③线性常系数差分方程的递推解法

④什么是滑动平均滤波器，他的单位脉冲响应是什么？

(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)

二、知识点：

1. 数字信号处理是用于数值计算的方法对信号进行出处理的一门科学，数字信号处理系统可以对数字信号进行处理，也可以对模拟信号进行处理。

★2. 模拟信号，时域离散信号，数字信号三者之间的区别。

答：模拟信号是信号幅度和时间均取连续值的信号；

时域离散信号是信号幅度取连续值，而时间取离散值的信号；

数字信号则是信号幅度和自变量均取离散值的信号。



★3. 如何将模拟信号转换成时域离散信号

答：将模拟信号转换成时域离散信号要经过等间隔取样，采样频率必须是模拟信号最高频率 2 倍以上。

4. 数字信号是对时域离散信号的幅度进行有限位的二进制编码，量化形成的，二

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

进制编码位数越高，数字信号越接近时域离散信号。

5. 时域离散信号的表示方法（序列）

（1）用集合符号表示序列；

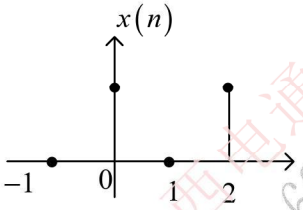
$x(n)=\{\cdots,0.0,1.3,\underline{2.6},1.4,2.8,0.7,\cdots\}$ 式中 $n=\{\cdots,-1,0,1,2,\cdots\}$

带下画线的元素表示 $n=0$ 的序列值。

（2）用公式表示序列：

$$x(n)=a^{|n|}\quad,\quad 0<a<1\quad,\quad -\infty<n<+\infty$$

（3）用图形表示：



常常在每一条竖线的顶端加一个小黑点

★6. 常见的时域离散信号：

（1）单位脉冲序列：

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & ,n=0\\ 0 & ,n\neq 0\end{cases}$$

（2）单位阶跃序列：

$$u(n)=\begin{cases}1 & ,n\geq 0\\ 0 & ,n<0\end{cases}\qquad u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)$$

（3）矩形序列：

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & ,\ 0\leq n\leq N-1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

（4）实指数序列：

$$x(n)=a^n u(n)\qquad \begin{cases}\text{收敛序列：}n\uparrow, & |x(n)|\downarrow\\ \text{发散序列：}n\uparrow, & |x(n)|\uparrow\end{cases}$$

（5）正弦序列和复指数序列：

正弦序列 $x(n)=A\sin(\omega n+\theta)$

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

ω：数字频率 ， rad
Ω：模拟信号角频率 ， rad/s $\Rightarrow$ $\omega=\Omega T$ ★
f： 模拟信号频率 ， Hz

复指数序列 $x(n)=e^{j\omega n}$

正弦序列和复指数序列都是以2π为周期的周期信号，通常只考虑ω的主值区$[-\pi，\pi]$或$[0，2\pi]$

★（6）周期序列

$x(n)=x(n+N)$ $-\infty<n<+\infty$ 规定周期序列的周期为满足上式的最小整数N

正弦序列 $x(n)=A\sin(\omega n+\varphi)$

只有$\frac{2\pi}{\omega}M$是一个正整数，正弦序列$x(n)$才是周期序列，M为正整数

同样适合复正弦序列和余弦序列

★★7. 什么是系统的线性，时不变性，以及因果性，稳定性，如何判断？

（1）线性：$y_1(n)=T[x_1(n)]$，$y_2(n)=T[x_2(n)]$ 假如$x(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$

若$y(n)=T[x(n)]=T[a\cdot x_1(n)+b\cdot x_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$

则该系统服从线性叠加定理。-----线性系统

（2）时不变性：如果系统对输入信号的运算关系$T[\bullet]$在整个运算过程中不随时间变化，则称该系统是时不变系统。*(西电通院电院AI考研Q群：680630306)*

$y(n)=T[x(n)]$ $y_1(n)=T[x(n-n_0)]=y(n-n_0)$-----时不变系统

（3）因果性：系统的因果性即系统的可实现性，如果系统n时刻的输出取决于n时刻及n时刻以前的输入信号，而和n时刻以后的输入信号无关。-----因果系统。

例：$y(n)=x(n)+x(n+1)$非因果系统

系统具有因果性的充要条件是：单位脉冲响应$h(n)\equiv 0,n<0$

（4）稳定性：所谓系统的稳定性是指系统对任意有界的输入，都能得到有界的输出。

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

系统稳定的充要条件：单位脉冲响应绝对可和 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|<\infty$

★8. 线性时不变系统输入和输出之间的关系

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)$$

★9. 滑动平均滤波器：对输入信号进行平滑，相当于一个低通滤波器，滤除高频分量，保留低频分量。

例：一个五项平均的滑动平均滤波器的差分方程为

$$y(n)=\frac{1}{5}\left[x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)+x(n-4)\right]$$

单位脉冲响应：$h(n)=\frac{1}{5}\left[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)+\delta(n-4)\right]$

如果让一个快速变化的信号通过五项滑动平均滤波器，得到的是相对变化缓慢的输出信号，平均的项数越多，则得到变化越缓慢的输出信号。

Q：为什么滑动平均滤波器对输入信号具有平滑作用，起低通滤波器的作用？

答:滑动平均滤波器的单位脉冲响应是矩形序列，而矩形序列的低频分量大大高于高频分量，如果将矩形序列作为滤波器的单位脉冲响应，则该滤波器具有低通滤波器的特征。

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

第二章 时域离散信号和系统的频域分析

一、学习要点

①求序列的傅里叶变换—序列频率特性

②求周期序列的傅里叶级数和傅里叶变换

③ $\delta(n)$ ， $a^n u(n)$ ， $R_N(n)$ ， 1 ， $\cos(\omega_0 n)$ ， $\sin(\omega_0 n)$ 和 $e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换。以上 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为有理数。

④傅里叶变换的性质和定理：傅里叶变换的周期性、移位与频移性质、时域卷积定理、巴塞伐尔定理、频域卷积定理、频域微分性质、实序列和一般序列的傅里叶变换的共轭对称性。

⑤求序列的 Z 变换及其收敛域

⑥序列 Z 变换收敛域与序列特性之间的关系

⑦求逆 Z 变换：部分分式法和围线积分法

⑧ Z 变换的定理和性质：移位、反转、 Z 域微分，共轭序列的 Z 变换、时域卷积定理、初值定理、终值定理、巴塞伐尔定理。

⑨如何求系统的传输函数和系统函数。

⑩如何用极点分布判断系统的因果性和稳定性。

⑪何谓零状态响应，零输入响应，稳态响应以及暂态响应；如何求稳态响应及系统稳定时间；如何用单位阶跃函数测试系统的稳定性。

⑫如何用零极点分布定性画出系统的幅频特性。

二、知识点：

★1. 时域离散信号的傅里叶变换 FT $\quad X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}$ $\quad X(e^{j\omega})$ 连续

傅里叶反变换 $\quad x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

时域离散信号的傅里叶变换以 2π 为周期 $\quad \omega=0$ 和 2π 的整数倍处都表示信号的

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

直流分量，最高频率是π

★2. 周期信号$\tilde{x}(n)$的离散傅里叶级数

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad , \quad -\infty<k<+\infty$$

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad , \quad -\infty<n<+\infty$$

$\tilde{x}(n)$，$\tilde{X}(k)$均为周期为N的周期序列

复指数序列$e^{j\omega_0 n}$的傅里叶变换

$$X\left(e^{j\omega}\right)=FT\left[e^{j\omega_0 n}\right]=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta\left(\omega-\omega_0-2\pi r\right)$$

一般周期序列的傅里叶变换

$$X\left(e^{j\omega}\right)=FT\left[\tilde{x}(n)\right]=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tilde{X}(k)\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

周期序列的傅里叶变换以2π为周期，而且一个周期中只有 N个用冲激函数表示的谱线。

★3. 基本序列的傅里叶变换

序列$x(n)$	傅里叶变换$X\left(e^{j\omega}\right)$
$\delta(n)$	1
$a^n u(n)$ ， $\lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$R_N(n)$	$e^{-j\omega(N-1)/2}\dfrac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$
1	$2\pi\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi r)$
$e^{j\omega_0 n}$ ， $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为有理数	$2\pi\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)$
$\cos(\omega_0 n)$ ， $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为有理数	$\pi\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\left[\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi r)\right]$

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

$\sin(\omega_0 n)$ ， $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为有理数	$-j\pi\sum\limits_{r=-\infty}^{+\infty}\left[\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)-\delta(\omega+\omega_0-2\pi r)\right]$

★4. 时域离散信号傅里叶变换的性质$(P_{31}$ 表2.2.2$)$

（1）任意一个序列被$(-1)^n$相乘，相当于将该序列的奇数序数值乘以-1，在频域内就将$X(e^{j\omega})$平移了π，相当于将$x(n)$的高频段和低频段相互交换了位置。

（2）傅里叶变换的对称性

共轭对称序列：$x_e(n)=x_e^*(-n)$

共轭反对称序列：$x_e(n)=-x_e^*(-n)$

$$\begin{cases} x(n)=x_r(n)+jx_i(n) \\ X(e^{j\omega})=FT[x(n)]=X_e(e^{j\omega})+X_0(e^{j\omega}) \\ X_e(e^{j\omega})=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}x_r(n)e^{-j\omega n} \quad , \quad X_0(e^{j\omega})=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}jx_i(n)e^{-j\omega n} \end{cases}$$

①实序列的傅里叶变换具有共轭对称性质，j乘以实数序列$x_i(n)$的傅里叶变换具有共轭反对称性质。*(西电通院电院AI考研Q群：680630306)*

②一般序列的傅里叶变换分成共轭对称分量和共轭反对称分量两部分，其中共轭对称分量对应序列的实部，而共轭反对称分量对应序列的虚部（包括j）。

$$\begin{cases} x(n)=x_e(n)+x_0(n) \ ， \ x_e(n)=\dfrac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)] \quad ， \quad x_0(n)=\dfrac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)] \\ X(e^{j\omega})=X_R(e^{j\omega})+jX_I(e^{j\omega}) \\ FT[x_e(n)]=\dfrac{1}{2}[X(e^{j\omega})+X^*(e^{j\omega})]=\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]=X_R(e^{j\omega}) \\ FT[x_0(n)]=\dfrac{1}{2}[X(e^{j\omega})-X^*(e^{j\omega})]=j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]=jX_I(e^{j\omega}) \end{cases}$$

③傅里叶变换的实部对应序列的共轭对称部分，而它的虚部（包括j）对应序列的共轭反对称部分。

★4. Z变换 $\quad X(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}$

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}=FT\left[x(n)\right]$$

傅里叶变换就是Z平面单位圆上的Z变换

Z变换存在的充分条件：$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x(n)z^{-n}\right|=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x(n)\right|\left|z^{-n}\right|<\infty$

使Z变换存在的$|z|$的取值域，称为$X(z)$的收敛域。$R_{x-}<|z|<R_{x+}$

★5. Z变换的收敛域与序列特性之间的关系

（1）有限长序列Z变换的收敛域：

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n}$$

①$n_1<0$，$n_2\le 0$ 时，$0\le|z|<\infty$；

②$n_1<0$，$n_2>0$ 时，$0<|z|<\infty$；

③$n_1\ge 0$，$n_2>0$ 时，$0<|z|\le\infty$

（2）右序列Z变换的收敛域.

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{+\infty}x(n)z^{-n}$$

①$n_1<0$，$R_{x-}<|z|<\infty$；　②$n_1\ge 0$，$R_{x-}<|z|\le\infty$；

（3）左序列Z变换的收敛域：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_1}x(n)z^{-n}$$

①$n_1<0$，$0\le|z|<R_{x+}$；　②$n_1\ge 0$，$0<|z|<R_{x+}$；

（4）双边序列Z变换的收敛域：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}\qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

6. Z变换的函数表达式一样，但收敛域不同，对应原序列也不同，因此正确地确定收敛域很重要。

7. 常见序列的Z变换及其收敛域。$(P_{38}$　表2.3.2$)$

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

★8. 逆Z变换
- 部分分式法 $\dfrac{X(z)}{z}$
- 围线积分法★ $x(n)=\dfrac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz=\sum_{k=1}^{M}\mathrm{Res}\left[F(z),z_k\right]$
- 幂级数法

$\mathrm{Res}\left[F(z),z_k\right]$表示被积函数$F(z)$在极点$z_k$的留数　$F(z)=X(z)z^{n-1}$

C是$X(z)$收敛域内一条包含原点的逆时针旋转的封闭曲线。

求逆Z变换就是求围线C内所有极点的留数之和。

z_k是单极点：$\mathrm{Res}\left[F(z),z_k\right]=(z-z_k)F(z)\big|_{z=z_k}$

z_k是N阶极点：$\mathrm{Res}\left[F(z),z_k\right]=\dfrac{1}{(N-1)!}\dfrac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\left[(z-z_k)F(z)\right]\Big|_{z=z_k}$

注：掌握笔记例题，帮助理解。*(西电通院电院AI考研Q群：680630306)*

留数辅助定理：

$F(z)$在Z平面有N个极点，围线C内有N_1极点，围线C外有N_2极点。

$$\sum_{k=1}^{N_1}\mathrm{Res}\left[F(z),z_{1k}\right]=-\sum_{k=1}^{N_2}\mathrm{Res}\left[F(z),z_{2k}\right]\text{//围线}C\text{内外留数之和为}0$$

成立条件：$F(z)=X(z)z^{n-1}$分母阶次比分子阶次高二阶或二阶以上。

$X(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$　$Q(z)\sim M$阶　　$P(z)\sim\sim N$阶

则　$N-M-n+1\geq 2$　　即　　$n\leq N-M-1$

★9. Z变换的性质和定理　　$(P_{41}$　表2.3.3$)$

★10. 系统的传输函数和系统函数　　系统的单位脉冲响应$h(n)$

传输函数：$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)e^{-j\omega n}$

系统函数：$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)z^{-n}$

$H\left(e^{j\omega}\right)=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$

系统的传输函数是系统单位脉冲响应在单位圆上的Z变换

★11.

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

（1）系统的输入$x(n)$是单一频率的复指数序列　$x(n)=e^{j\omega_0 n}$，$n\geq 0$

对于因果稳定系统，其稳态输出为　$y_{ss}(n)=e^{j\omega_0 n}H(e^{j\omega_0})=A(\omega_0)e^{j[\omega_0 n+\theta(\omega_0)]}$

（2）输入$x(n)$是余弦序列　$x(n)=\cos(\omega_0 n)$

因果系统对于余弦序列的稳态输出：$y_{css}(n)=A(\omega_0)\cos[\omega_0 n+\theta(\omega_0)]$

（3）输入$x(n)=\sin(\omega_0 n)$，相应的稳态输出：$y_{sss}(n)=A(\omega_0)\sin[\omega_0 n+\theta(\omega_0)]$

注：①$H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}$

$A(\omega)=|H(e^{j\omega})|$……幅频特性

$\theta(\omega)=\arg[H(e^{j\omega})]$……相频特性

②由（1）可知：对于因果稳定系统，输入复指数序列的稳态响应仍然是同一频率的指数序列，但幅度和相位决定于在ω_0处的传输函数。

即传输函数起改变复指数序列的幅度和相位的作用。

③对于一般信号$x(n)$　输出$y(n)$的频谱函数为　$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

输出信号的幅频特性和相频特性取决于输入信号的频谱特性和系统的传输函数。

★12. 如何用极点分布判断系统的因果性和稳定性。

因果系统的系统函数的极点均在某个园内，收敛域包含∞。//圆外

系统稳定，系统函数的收敛域一定包含单位圆。

系统因果稳定的条件：$H(z)$的极点应集中在单位圆内。

13. 稳态响应

假设系统处于零状态，系统输出为$y(n)$　$Y(z)=X(z)\cdot H(z)$

令　$y_{ss}(n)=\lim_{n\to\infty}y(n)$　则$y_{ss}(n)$称为系统的稳态响应。

此时认为暂态响应为零，稳态响应和输入信号以及系统的频率特性有关。而暂态响应和系统的极点有关，如果极点均在单位圆内，暂态响应幅度会随着n的增大而减小，当 $n\to\infty$ 时暂态响应为零；如果有极点在单位圆外，暂态响应的幅度会随着n的增大而增大，当 $n\to\infty$ 时幅度为 ∞ ，形成系统的不稳

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

定现象。

★14. 如果已知系统稳定，输入信号是单位阶跃序列$x(n)=u(n)$，则

稳态响应$y_{ss}(n)=H(z)\big|_{z=1}$

★15. 系统稳定性的判断

（1）判断极点是否在单位圆内确定系统的稳定性。

（2）用单位阶跃信号进行测试，（如何用单位阶跃信号测试系统的稳定性？）

★

在系统的输入端加入单位阶跃序列，如果系统稳定，随着n的增大，输出接近一个常数；如果系统不稳定，随着n的增大，输出幅度会无限制增大或者保持振荡。

16. 系统稳定时间的确定。

如果系统稳定，输入是一个阶跃序列，从数学上讲，只有当 $n\to\infty$ 时，才能结束暂态响应，但工程上只要系统输出中暂态响应幅度减小到最大值的 1%（最大值的 99%），即可认为系统稳定。

★17. 如何用零极点分布定性画出系统的幅频特性？依据P_{53} 式24.22

//仅对低阶系统有效 *(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

（1）系统函数的极点，主要影响幅频特性的峰值，峰值频率在极点附近。

极点越靠近单位圆，峰值越高越尖锐。

如果极点在单位圆上，则幅度为∞，系统不稳定。

（2）系统函数的零点主要影响幅频特性的谷值，谷值频率在零点附近。

零点越靠近单位圆，谷值越接近零。

如果极点处在单位圆上，谷值为零。

（3）处于坐标原点的零、极点不影响幅频特性。

附：滤波器是高通还是低通等滤波器特性，也可以通过分析零极点分布确定，不必等画出幅度特性再确定。

一般在最靠近单位圆的极点附近是滤波器的通带，阻带在最靠近单位圆的零点附近，如果没有零点，则离极点最远的地方是阻带。

★18. 求矩形序列$R_N(n)$的傅里叶变换

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

$$R\left(e^{j\omega}\right)=FT\left[R_N\left(n\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_N\left(n\right)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j\frac{\omega N}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}}\frac{e^{j\frac{\omega N}{2}}-e^{-j\frac{\omega N}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

$$=e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

西电通院复试mcw9i9cet
西电通院电院AI考研Q群:680630306

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

第三章 离散傅里叶变换(DFT)及其快速算法(FFT)

一、学习要点

1. *DFT* 的定义和物理意义， *DFT* 与 *ZT* ， *FT* 之间的关系
2. *DFT* 的重要性质和定理：隐含周期性、循环移位性质、共轭对称性、实序列 *DFT* 的特点、循环卷积定理、离散巴塞伐尔定理。
3. 频域采样定理。
4. *FFT* 的基本原理及应用。

二、知识点：

★1. 离散傅里叶变换 *DFT* ：

设 $x(n)$ 长度为 M ，定义 $x(n)$ 的 $N\ (N\geq M)$ 点 *DFT* 为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot W_N^{kn},k=0,1,2,\cdots,N-1 \quad \left(W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)$$

$$IDFT:x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\cdot W_N^{-kn} \quad ,\quad n=0,1,2,\cdots,N-1$$

n 可以表示时间

k 是与频率成线性关系的变量

具体对应的频率为 $\frac{2\pi}{N}k$ rad

★2. *DFT* 与 *ZT* ， *FT* 之间的关系：序列 $x(n)$ 长度为 M ，$(N\geq M)$

ZT ： $X(z)=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)z^{-n}$

FT ： $X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)e^{-j\omega n}$

N 点 *DFT* ： $X(k)=DFT\left[x(n)\right]_N=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$ ，$k=0,1,2,\cdots,N-1$

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

$$\bigstar\begin{cases}X(k)=X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}\ ,\ k=0,1,2,\cdots,N-1\\ X(k)=X\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\ ,\ k=0,1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$

DFT的物理意义★
（1）序列的N点DFT是序列Z变换在单位圆上的N点等间隔采样，频率采样间隔为$\frac{2\pi}{N}$
（2）序列的N点DFT是序列的傅里叶变换在频率区间$[0,2\pi]$上的N点等间隔取样，频率采样间隔为$\frac{2\pi}{N}$

3. 为什么用DFT对周期序列作频谱分析，希望取一周并作N点变换？（同理用整数倍周期做DFT）

答：周期序列和它的离散傅里叶级数都是周期性的。*(西电通院电院AI考研Q群：680630306)*如果周期序列的周期是N，那么离散傅里叶级数的周期也是N。周期序列的频谱是由N个谐波组成的，因此其频谱由N条离散谱线组成。如果将周期序列和其离散傅里叶级数都取主值区，那么刚好就是一对离散傅里叶变换。换句话说，对周期为N的周期序列取一周，作N点DFT，得到的就是它的离散傅里叶级数的主值区。

4. 离散傅里叶变换DFT和离散傅里叶级数DFS之间的关系。

有限长序列$x(n)$长度为M，以N为周期进行周期延拓 $\tilde{x}_N(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(n+mN)$

周期序列$\tilde{x}_N(n)$的DFS：

$$\tilde{X}(k)=DFT\left[\tilde{x}_N(n)\right]=\sum_{n=0}^{M-1}\tilde{x}_N(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{M-1}x_N(n)W_N^{kn}\ ,\ -\infty<k<+\infty$$

有限长序列$x(n)$的DFT：

$$X(k)=DFT\left[x(n)\right]_N=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)W_N^{kn}\ ,\ k=0,1,2,\cdots,N-1$$

$$\begin{cases}\tilde{X}(k)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}X(k+mN)\\ X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)\end{cases}$$

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

成立条件：$N \geq M$，即 DFT 的变换区间 N 不能小于 $x(n)$ 的长度 M 。

5. DFT 的矩形表示　　$X = D_N x$　　$x = D_N^{-1} X$

$$X = \begin{bmatrix} X(0) & X(1) & \cdots & X(N-2) & X(N-1) \end{bmatrix}^T$$

$$x = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(N-2) & x(N-1) \end{bmatrix}^T$$

$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$D_N^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$D_N^{-1} = \frac{1}{N} D_N^*$$

6. DFT 的性质

（1）和 ZT ， FT 一样具有线性性质，即服从线性叠加定理。

★（2）隐含周期性：$X(k) = \mathrm{DFT}\left[x(n)\right]_N$ 则 $X(k) = X(k + mN)$ ， N 是 DFT 的变换区间。

★（3）循环移位性质：设序列 $x(n)$ 长度为 M ，对 $x(n)$ 以 $N(N \geq M)$ 为周期进行周期延拓。

$x(n)$ 的循环移位序列为： $y(n) = x\left[(n+m)\right]_N R_N(n)$

表示将 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓，再左移 m 个单位取主值序列，就得到 $x(n)$ 的循环移位序列 $y(n)$ 。　　$Y(k) = W_N^{-km} X(k)$

★（4）复共轭序列的 DFT ： $x^*(n)$ 表示 $x(n)$ 的复共轭序列，且 $X(k) = \mathrm{DFT}\left[x(n)\right]_N$ 。

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

则 $\mathrm{DFT}\left[x^*(n)\right]=X^*(N-k)$ ． $k=0,1,2,\cdots,N-1$ 式中 $X(N)=X(0)$。

同理。$\mathrm{DFT}\left[x^*(N-n)\right]=X^*(k)$ ． $k=0,1,2,\cdots,N-1$ 式中 $x(N)=x(0)$。

★（5）*DFT* 的共轭对称序列

FT 的共轭对称序列是对坐标原点的共轭对称，在 *DFT* 中指的是对变换区间的中心，即 $\frac{N}{2}$ 点的共轭对称。[注：左边是 *DFT*，有限长；右边是 *FT*，可以有限长也可以无限长。]

（*a*）共轭对称与共轭反对称序列

$$x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n) \qquad x(n)=x_e(n)+x_o(n)$$

$$x_{ep}(n)=x_{ep}^*(N-n) \qquad x_e(n)=x_e^*(-n)$$

$$x_{op}(n)=-x_{op}^*(N-n) \qquad x_o(n)=-x_o^*(-n)$$

$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(N-n)\right] \qquad x_e(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(-n)\right]$$

$$x_{op}(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(N-n)\right] \qquad x_o(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(-n)\right]$$

（*b*）将序列分成实部和虚部 即 $x(n)=x_r(n)+jx_i(n)$

$$X(k)=X_{ep}(k)+X_{op}(k) \qquad X\left(e^{j\omega}\right)=X_e\left(e^{j\omega}\right)+X_o\left(e^{j\omega}\right)$$

则 $X_{ep}(k)=DFT\left[x_r(n)\right]$ 则 $X_e\left(e^{j\omega}\right)=FT\left[x_r(n)\right]$

$X_{op}(k)=DFT\left[jx_i(n)\right]$ $X_o\left(e^{j\omega}\right)=FT\left[jx_i(n)\right]$

（*c*）将序列分成共轭对称和共轭反对称

$$x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n) \qquad x(n)=x_e(n)+x_o(n)$$

$$X(k)=X_r(k)+jX_i(k) \qquad X\left(e^{j\omega}\right)=X_r\left(e^{j\omega}\right)+jX_i\left(e^{j\omega}\right)$$

则 $X_r(k)=DFT\left[x_{ep}(n)\right]$ 则 $X_r\left(e^{j\omega}\right)=FT\left[x_e(n)\right]$

$jX_i(k)=DFT\left[x_{op}(n)\right]$ $jX_i\left(e^{j\omega}\right)=FT\left[x_o(n)\right]$

（*d*）实序列 *DFT* 和 *FT* 的特点， 假如 $x(n)$ 是实序列

$X(k)=\left|X(k)\right|\bullet e^{j\theta(k)}=DFT\left[x(n)\right]$ $X\left(e^{j\omega}\right)=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|\bullet e^{j\theta(\omega)}=FT\left[x(n)\right]$

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

$X(k)=X^*(N-k)$　　$X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$

$|X(k)|=|X(N-k)|$　　$|X(e^{j\omega})|=|X^*(e^{-j\omega})|$

$\theta(k)=-\theta(N-k)$　　$\theta(j\omega)=-\theta(-j\omega)$

（6）循环卷积定理

★①设序列$h(n)$和$x(n)$的长度分别为N和M。它们的$L\left(L\geq\max[N,M]\right)$点循环卷积，用$y_c(n)$表示。*(西电通院电院AI考研Q群：680630306)*

$$y_c(n)=\left[\sum_{m=0}^{L-1}h(m)x\left((n-m)\right)_L\right]\bullet R_L(n)=h(n)\textcircled{L}x(n)$$

用矩阵方程表示为：

$$\begin{bmatrix}y_c(0)\\y_c(1)\\y_c(2)\\\vdots\\y_c(L-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(0)&x(L-1)&x(L-2)&\cdots&x(1)\\x(1)&x(0)&x(L-1)&\cdots&x(2)\\x(2)&x(1)&x(0)&\cdots&x(3)\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x(N-1)&x(N-2)&x(N-3)&\cdots&x(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h(0)\\h(1)\\h(2)\\\vdots\\h(N-1)\end{bmatrix}$$

上式中右边第一个矩阵称为$x(n)$的L点循环矩阵，它的特点是：

①第一行是$x(n)$的L点循环倒相，$x(0)$不动，后面其他反转180°放在它的后面。

注意：如果$x(n)$的长度$M<L$，则需要在$x(n)$末尾补上$L-M$个零。

②第一行以后的各行均是前一行向右循环一位形成的。

③矩阵的各主对角线上的序列值均相等。

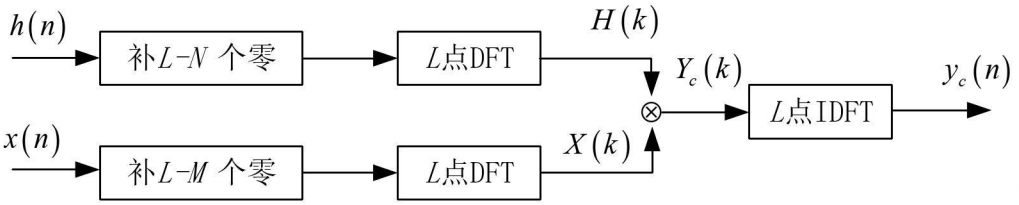
*DFT*的时域循环卷积定理　　$y_c(n)=x(n)\textcircled{L}h(n)$

则　$Y_c(k)=DFT\left[y_c(n)\right]_L=H(k)\bullet X(k)$　，　$k=0,1,2,\cdots,L-1$

式中$H(k)=DFT\left[h(n)\right]_L$　，　$X(k)=DFT\left[x(n)\right]_L$

时域循环卷积定理表明，*DFT*将时域循环卷积关系变成频域的相乘关系。

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666



用*DFT*计算两个有限长序列L点循环卷积的运算方框图。

②*DFT*的频域循环卷积定理。

设$h(n)$和$x(n)$长度分别为N和M，并且$y_m(n)=x(n)\bullet h(n)$，

$H(k)=DFT\left[h(n)\right]_L$ ， $X(k)=DFT\left[x(n)\right]_L$

则：$Y_m(k)=\frac{1}{L}H(k)$ ① $X(k)=\frac{1}{L}\left[\sum_{j=0}^{L-1}H(j)X\left((k-j)\right)_L\right]\bullet R_L(k)$，$L\geq\max\left[N,M\right]$

(7)离散巴塞伐尔定理 $\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2$

7. 时域采样 ⇔ 频域周期延拓

时域周期延拓 ⇔ 频域采样

★8. 频域采样与频域采样定理

如果原序列$x(n)$长度为M，对$X\left(e^{j\omega}\right)$在频率区间$\left[0,2\pi\right]$上等间隔采样$N$点，得到$X_N(k)$，则仅当采样点数$N\geq M$时，才能由频率采样$X_N(k)$恢复$x(n)=IDFT\left[X_N(k)\right]_N$，否则将产生时域混叠失真，不能由$X_N(k)$恢复出原序列$x(n)$。

只有当时域序列$x(n)$为有限长序列时，以适当的采样间隔对其频谱函数$X\left(e^{j\omega}\right)$采样，才不会丢失信息。

9. $x_N(n)=x(n)$这一公式是否一定成立？

如果$x(n)$的长度为M，只有当频域采样点数$N\geq M$时，$x_N(n)=x(n)$这一公式才一定成立。否则，$\tilde{x}_N(n)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}x(n+iN)$会发生时域混叠，

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

$x_N(n)\neq x(n)$。这就是频域采样定理。

通过频域采样得到的频域离散函数在$[0,2\pi]$上均匀采样N点，再对其进行N点$IDFT$，得到的序列应是原序列以N为周期进行周期延拓后的主值区。★★

10. ①用$X(k)$表示$X(z)$的z域内插公式：$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi_k(z)$

内插函数：$\varphi_k(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$

②用$X(k)$表示$X(e^{j\omega})$的z域内插公式：$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$

内插函数：$\varphi(\omega)=\frac{1}{N}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$

11. DFT计算量：计算$X(k)$的N个值需要N^2次复数乘法和$N(N-1)$次复数加法。

12.

减少运算量的方法：
- 长序列分为短序列
- 旋转因子的周期性和对称性
  - 周期性：$W_N^{m+lN}=W_N^m$
  - 对称性：$\left(W_N^{N-m}\right)^*=W_N^m;W_N^{m+\frac{N}{2}}=-W_N^m$

★13. 基2FFT算法：　　$N=2^M$

（a）利用DFT基本定义中的旋转因子W_N^m的周期性和对称性

（b）要求DFT的变换点数服从2的整幂次方，将序列按照偶数项和奇数项分成两组，一直分到形成两点的蝶形运算为止$(DIT-FFT)$，或者将序列按照前后分成两组，一直分到形成两点的蝶形运算为止$(DIF-FFT)$。

14. $DIT-FFT$算法　　$x_1(l)=x(2l)$　　$x_2(l)=x(2l+1)$

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

$$X(k)=DFT\left[x(n)\right]_N=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

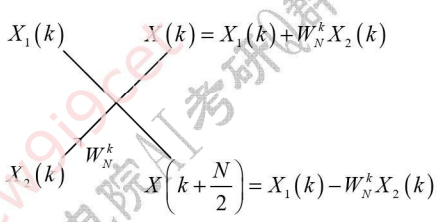
$$=\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l)W_N^{k2l}+\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l+1)W_N^{k(2l+1)}$$

$$=\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x_1(l)W_{\frac{N}{2}}^{kl}+W_N^k\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x_2(l)W_{\frac{N}{2}}^{kl}\quad,\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

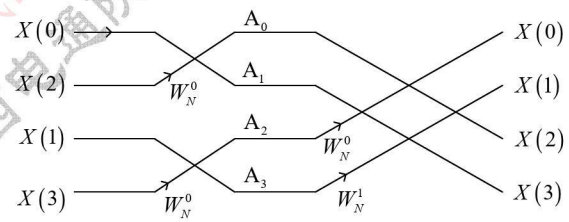
$$\begin{cases}X_1(k)=DFT\left[x_1(l)\right]_{\frac{N}{2}}=\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x_1(l)W_{\frac{N}{2}}^{kl}\quad,\quad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1\\ X_2(k)=DFT\left[x_2(l)\right]_{\frac{N}{2}}=\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x_2(l)W_{\frac{N}{2}}^{kl}\quad,\quad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}X(k)=X_1(k)+W_N^kX_2(k)\\ X\left(k+\frac{N}{2}\right)=X_1(k)-W_N^kX_2(k)\end{cases},\quad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

就将N点DFT的计算分解为计算两个$\frac{N}{2}$点离散傅里叶变换$X_1(k)$和$X_2(k)$



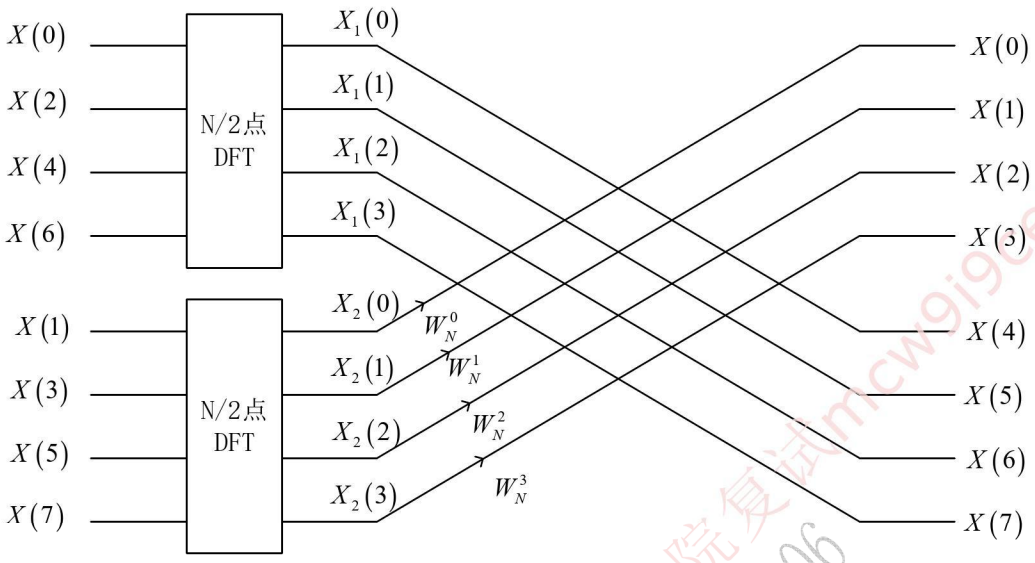
蝶形图及运算功能



4点FFT运算流图

西电通院复试mcw9i9cet 西电通院电院AI考研Q群：680630306

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666



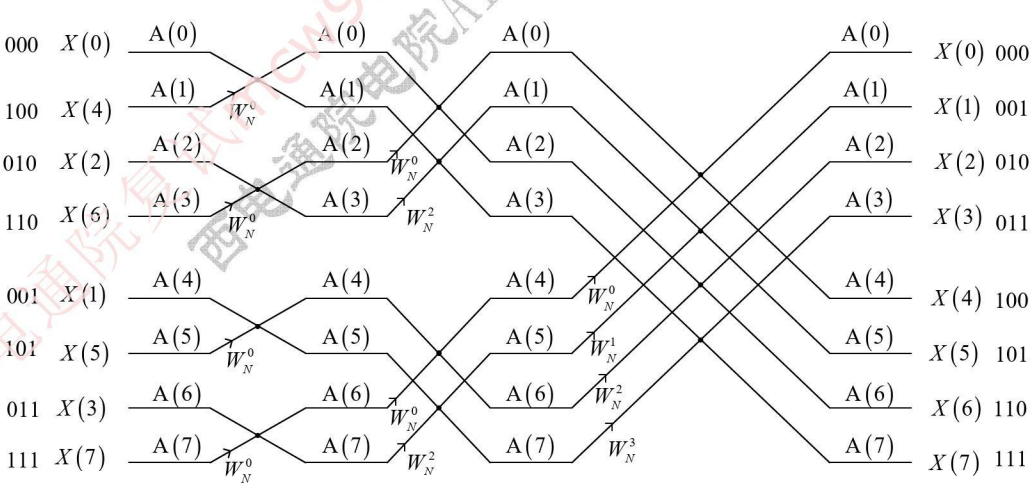
8点DFT一次时域抽取分解运算流图

★对 $N=2^M$ 的一般情况。第 L 级旋转因子为

$$W_N^P = W_{2^L}^J \quad . \quad J = 0,1,2,\cdots 2^{L-1}-1$$

$$P = J \times 2^{M-L}$$

序列的倒序：*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*



8点DIT-FFT运算框图

原位运算：计算完一个蝶形后，所得输出数据可立即存入原输入数据所占用的存储单元$\mathrm{A}(0),\cdots\mathrm{A}(7)$，利用同一存储单元存储蝶形计算输入，输出数据的方法称为原位（址）计算。

节约内存，节省寻址时间。

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

★15. $DIT-FFT$ 的运算效率

$N=2^M$ 时，其 $DIT-FFT$ 的运算流图由 M 级蝶形构成，每级有 $\frac{N}{2}$ 个蝶形。每级需要 $\frac{N}{2}$ 次复数乘法运算和 N 次复数加法运算。

M 级蝶形所需复数乘法次数 $C_M(2)$ 和复数加法运算次数 $C_A(2)$ 分别为

$$\begin{cases} C_M(2)=\frac{N}{2}\bullet M=\frac{N}{2}\bullet\log_2 N \\ C_A(2)=N\bullet M=N\bullet\log_2 N \end{cases}$$

N越大，$DIT-FFT$运算效率越高

$DIT-FFT$ 的运算效率为 $\frac{DFT的乘法次数}{DIT-FFT的乘法次数}=\frac{N^2}{C_M(2)}$

16. $DFT(FFT)$应用

★（1）用 $DFT(FFT)$ 计算两个有限长序列的线性卷积

线性卷积：$y(n)=x(n)*h(n)$　　循环卷积：$y_C(n)=x(n)\textcircled{L}h(n)$

$$y_C(r)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}y(n+iL)\bullet R_L(n)$$

L 点循环卷积 $y_C(n)$ 等于线性卷积 $y(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列。

只有当 $L\geq N+M-1$ 时，周期延拓无混叠才能使 $y_C(n)=y(n)$

$L\geq N+M-1$ 是循环卷积结果和线性卷积结果相等的充要条件。

（2） 用DFT计算有限长序列和无限长序列的线性卷积 $\begin{cases}\text{重叠相加法}\surd \\ \text{重叠保留法}\end{cases}$

重叠相加法基本思想：将 $x(n)$ 分段，每段长度为 M，然后依次计算各段与 $h(n)$ 的卷积，再由各段的卷积结果得到 $y(n)$（P_{87} 重叠相加法时域波形）

计算步骤：（设 $M>N$）

①计算并保存 $H(k)=DFT\left[h(n)\right]_L$，$L=N+M-1$，$i=0$;

②读入 $x_i(n)$ 计算 $X_i(k)=DFT\left[x_i(n)\right]_L$;

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

③ $Y_i(k)=H(k)\bullet X_i(k)$;

④ $y_i(n)=IDFT\left[Y_i(k)\right]_L$ ， $n=0,1,2,\cdots,L-1$

⑤ 计算$y(iM+n)=\begin{cases}y_{i-1}(M+n)+y_i(n) & ，\ 0\le n\le N-2\\ y_i(n) & ，\ N-1\le n\le M-1\end{cases}$

⑥ $i=i+1$,返回②。

（3）用DFT对序列进行谱分析

①对有限长序列的谱分析：

理论依据：有限长序列$x(n)$的长度为M，该序列的N点DFT就是它的频谱函数$X\left(e^{j\omega}\right)$，在频率区间$[0,2\pi]$上的$N$点等间隔采样。

采样点频率为$\omega_k=\dfrac{2\pi}{N}k$ ， $k=0,1,2,\cdots N-1$

频率分频率是指频谱分析中能够分辨的两个相邻频率点谱线的最小间距。

具体方法:*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

（1）根据频率分辨率要求确定DFT变换区间长度N。

DFT能够实现的频率分辨率为$\dfrac{2\pi}{N}$，如果要求频率分辨率为D弧度。

则要求$\dfrac{2\pi}{N}\le D$。即$N_{\min}=\dfrac{2\pi}{D}$；当然$N\ge x(n)$的长度，一般$N=2^M$

（2）计算$X(k)=DFT\left[x(n)\right]_N$;，并由$X(k)$绘制频率图。

★②对模拟信号进行频谱分析$\Rightarrow$两个指标$\begin{cases}\text{分辨率}\\ \text{谱分析的范围}\end{cases}$

★★★a. 参数选择：采样频率$F_s\Rightarrow$信号的最高截止频率f_c

频率分辨率$F\Rightarrow$能够分辨的两个频率分量最小的间隔

频谱分析范围$\Rightarrow\dfrac{F_s}{2}$

采样点$N\Rightarrow$与对信号的观测时间T_p有关

西电通院电院AI考研Q群：680630306 西电通院考试mcw9i9cet

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

$$\begin{cases} F_{s\min}=2f_c \\ N_{\min}=\dfrac{F_{s\min}}{F} \quad \text{若要求频率分辨率提高1 倍} \Rightarrow F'=\dfrac{1}{2}F \\ T_{p\min}=\dfrac{1}{F} \end{cases}$$

b. 误差来源★★★

〈1〉频谱混叠：采样频率不满足采样定理；一般模拟信号的频谱函数并不是锐截止的；信号中总含有或多或少的干扰或噪声，引起频谱混叠。

解决方法：提高采样频率。

〈2〉截断效应：因为*DFT*是一种有限的离散傅里叶变换。*(西电通院电院 AI 考研 Q 群: 680630306)*因此进行谱分析时，只能对模拟信号截取一部分进行分析。因截断引起的误差现象称为截断效应。比较截断效应前后的幅度谱主要有泄露和谱间干扰两种误差。

〈3〉栅栏效应：一般模拟信号的频谱是连续函数。但*N*点*DFT*(*FFT*)得到的只是*N*个采样点上的频谱值，两点之间的频谱值是不知道的，就好像被栅栏遮住了一样，因此这种现象被称为栅栏效应。

解决方法：增加*DFT*的变换点数，在信号尾部加零的方法加大*DFT*(*FFT*)的变换点数。

③用*DFT*(*FFT*)对采样序列进行谱分析的误差来源 $\begin{cases}\text{截断效应}\\ \text{栅栏效应}\end{cases}$

④用*DFT*(*FFT*)对周期信号进行谱分析　　P_{112}

周期序列：在模拟周期信号的每个周期中采样相同点数。

将该周期序列截取长度为整数倍周期的一段，进行*DFT*(*FFT*)，可以得到模拟信号的频谱。

要求 $\begin{cases}\text{截取的长度是周期的倍数}\\ \text{采样频率要满足采样定理，满足每个周期中的采样点数相等。}\end{cases}$

注意：如果对于模拟信号或者序列截取的一段不是周期的整数倍，则会出现非常大的谱分析误差。

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

如果只知道信号是周期信号，而不知道信号的周期，可以取观测时间长一些，这样就可以减小截断效应的影响。

西电通院复试mcw9i9cet
西电通院电院AI考研Q群：680630306

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

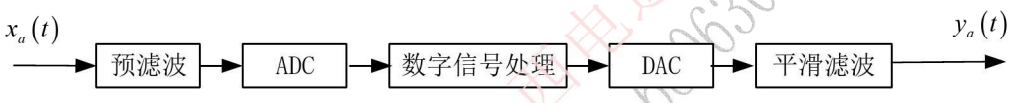
第四章 模拟信号数字处理

一、学习要点

1. 模拟信号数字处理原理框图
2. 时域采样定理
3. 数字信号转换成模拟信号
4. 线性模拟系统的数字模拟
5. 用 $DFT\left(FFT\right)$ 对模拟信号进行频谱分析

二、知识点：

★1. 模拟信号数字处理原理框图



预滤波器：模拟低通滤波器，作用是防止信号折叠频率以上的频率分量引起频谱混叠，造成信号失真。

模数转换器（ADC）：完成模拟信号到数字信号的转换。

数字信号处理：核心，完成对信号的处理。

数模转换器（DAC）：完成数字信号到模拟信号的转换。

平滑滤波器：模拟低通滤波器，最高截止频率决定于数字信号处理后的信号最高频率，完成对数模转换后的模拟信号的进一步平滑作用。

2. 将模拟信号转换成数字信号的核心问题是：如何合理地选择采样频率。

如果选择得过低，会使信号失真（即丢失信息）；

如果选择得太高，会使数据量太大，处理时间长，系统成本增大等。

★2. 时域采样定理。

理想采样信号和模拟信号之间的关系：$\hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)\bullet\delta(t-nT)$

采样信号的频谱和模拟信号频谱之间的关系式：

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

$$\hat{X}_a(j\Omega)=FT\left[\hat{x}_a(t)\right]=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_a(j\Omega-jn\Omega_s)$$

$$\Omega_s=\frac{2\pi}{T}=2\pi F_s$$

采样定理总结：对模拟信号$x_a(t)$进行等间隔取样，形成理想采样信号$\hat{x}_a(t)$，理想采样信号的频谱是模拟信号的频谱以采样频率为周期延拓形成的。设模拟信号$x_a(t)$是带限信号，最高角频率为Ω_c。如果采样频率$\Omega_s\geq 2\Omega_c$，那么让理想采样信号通过一个增益为T，截止角频率为$\frac{\Omega_s}{2}$的低通滤波器$G(j\Omega)$，可以唯一恢复出原来的模拟信号$x_a(t)$，如果$\Omega_s<2\Omega_c$，会造成频谱混叠现象，不可能无失真地从理想采样信号中恢复出原来的模拟信号。

采样序列频谱和模拟信号频谱之间的关系式：

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_a\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$

结论：采样序列的频谱也是模拟信号的频谱周期性延拓形成的，延拓周期为Ω_s，所以信号的最高频率仍然不能超过$\frac{\Omega_s}{2}$，否则也会发生频谱混叠现象。

在数字域，用数字频率ω_s表示延拓周期，$\omega_s=\Omega_s\cdot T=\frac{2\pi}{T}\cdot T=2\pi$，因此序列的频谱仍以$2\pi$为周期，与折叠频率$\frac{\Omega_s}{2}$对应的数字频率是$\pi$。

3. 由序列恢复成模拟信号的理想恢复公式（理想插值公式）

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)\frac{\sin\frac{\pi(t-nT)}{T}}{\frac{\pi(t-nT)}{T}}$$，$x_a(nT)$是对模拟信号的采样值，在数值上等于序列的理想恢复滤波器$G(j\Omega)$的单位冲激响应$g(t)=\frac{\sin\frac{\Omega_s t}{2}}{\frac{\Omega_s t}{2}}=Sa\left(\frac{\Omega_s t}{2}\right)$。

★4. 时域采样定理和频域采样定理

时域采样定理	频域采样定理
频域周期延拓Ω_s	时域周期延拓N

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

$\Omega_s \geq 2\Omega_c$	$N \geq M\left(M为x(n)长度\right)$
$\hat{X}_a(j\Omega)=FT\left[\hat{x}_a(t)\right]=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_a(j\Omega-jn\Omega_s)$	$\tilde{x}_N(n)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}x(n+iN)$
$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)\frac{\sin\frac{\pi(t-nT)}{T}}{\frac{\pi(t-nT)}{T}}$	$X(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_0^{-k}\bullet z^{-1}}$
频谱混叠	时域混叠

5. 数字信号转换成模拟信号有两种方法：

（1）用理想滤波器进行理想恢复，虽不能实现，但没有失真，可作为实际恢复的逼近方向。

（2）用D/A变换器，一般用的是零阶保持器，虽有误差，但简单实用。

6. 通过与理想恢复比较，得出零阶保持器的问题。

（1）在$|\Omega|<\frac{\pi}{T}$区域，幅度不够平坦，会造成信号的失真，影响在一些高保真系统中的应用。

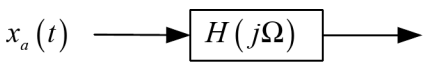
（2）$|\Omega|>\frac{\pi}{T}$的区域增加了很多的高频分量，表现在时域上，就是恢复出的模拟信号是台阶形的。*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

措施：D/A变换器以前，增加一个数字滤波器（起提升高频幅度的作用），这样再经过零阶保持器（保持幅度不下降），就可以满足高保真的要求。

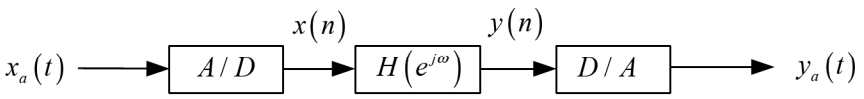
平滑滤波器----滤除多余的高频分量。

★7. 如果一个时域离散信号是由模拟信号采样得来的，且采样满足采样定理，该时域离散信号的数字频率和模拟信号的模拟频率之间关系为$\omega=\Omega T=\frac{\Omega}{F_s}$。

★8. 线性模拟系统的数字模拟



模拟系统



数字系统

数字网络系统函数和连续系统传输函数之间的关系：

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

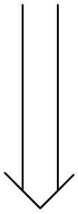
$$H\left(e^{j\omega}\right)=H_a\left(j\Omega\right)|_{\Omega=\frac{\omega}{T}} \qquad \left(|\omega|\le\pi\right)$$

数字系统的单位脉冲响应和模拟系统的单位冲激响应之间的关系：

$$h(n)=h_a(t)|_{t=nT}=h_a(nT)$$

结论：

模拟系统的传输函数或单位冲激响应



$$H\left(e^{j\omega}\right)=H_a\left(j\Omega\right)|_{\Omega=\frac{\omega}{T}}$$

$$h(n)=h_a(t)|_{t=nT}=h_a(nT)$$

数字系统的系统函数或单位脉冲响应

注意：想用数字滤波器模拟一个模拟高通滤波器，则无论用多高的采样频率，都会因为频谱混叠而无法模拟。

解决方法：脉冲响应不变法。

例 4.2.1 已知 $x_a(t)=\cos 2\pi f_0 t$ ，$f_0=50Hz$ ，采样频率 $F_s=200Hz$，对 $x_a(t)$ 进行采样，得到时域离散信号 $x(n)$ ，求 $x(n)$ 的频谱。

解：

方法一：对 $x_a(t)=\cos 2\pi f_0 t$ 进行采样，得到序列 $x(n)$ 为

$$x(n)=\cos\omega_0 n \qquad \omega_0=2\pi f_0 \bullet T=\frac{2\pi f_0}{F_s}=\frac{\pi}{2}$$

因为采样频率 $F_s=200Hz$ ，信号频率 $f_0=50Hz$ ，得到的 $x(n)$ 是余弦周期序列

则 $$X\left(e^{j\omega}\right)=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)\right]$$

方法二：对模拟信号频谱以采样频率周期延拓。

$$X_a\left(j\Omega\right)=\pi\left[\delta\left(\Omega-2\pi f_0\right)+\delta\left(\Omega+2\pi f_0\right)\right]$$

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

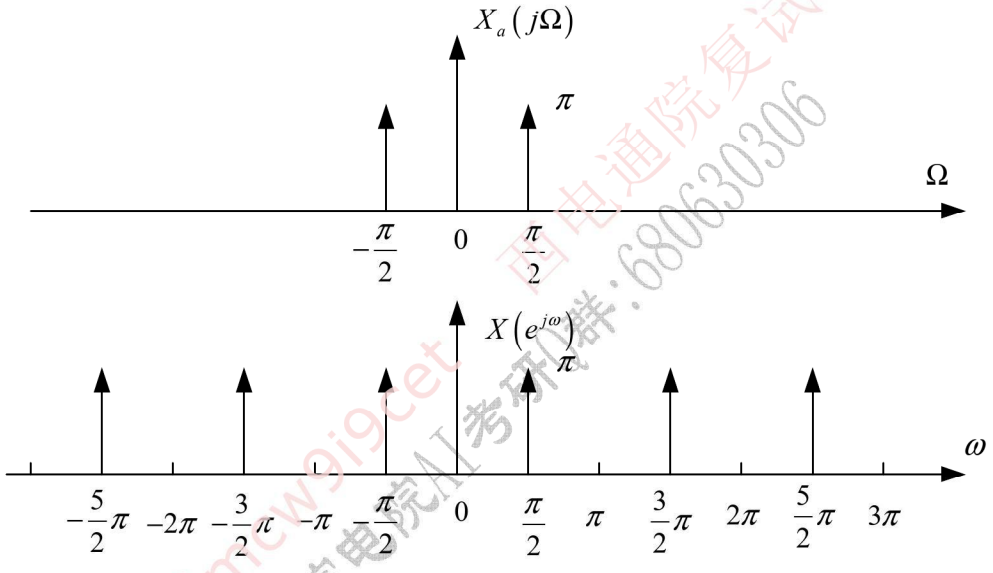
则

$$X(j\omega)=\frac{\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\delta\left(\frac{\omega}{T}-2\pi f_0-\frac{2\pi k}{T}\right)+\delta\left(\frac{\omega}{T}+2\pi f_0-\frac{2\pi k}{T}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{T}\times T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\delta(\omega-2\pi f_0\cdot T-2\pi k)+\delta(\omega+2\pi f_0\cdot T-2\pi k)\right] \qquad //\delta(at)=\frac{1}{a}\delta(t)$$

$$=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\delta\left(\omega-\frac{2\pi f_0}{F_s}-2\pi k\right)+\delta\left(\omega+\frac{2\pi f_0}{F_s}-2\pi k\right)\right]$$

$$=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)\right]$$



$$X\left(e^{j\Omega T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_a\left(j\Omega-jk\Omega_s\right)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_a\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_a\left(j\frac{\omega}{T}-j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

例 4.5.1 ：对模拟信号进行频谱分析，要求谱分辨率 $F\le 10Hz$ ，信号最高频率 $f_c=2.5kHz$ ，试计算最小的记录时间 $T_{p\min}$ ，最大的采样间隔 $T_{\max}$ ，最小的采样点数 $N_{\min}$ 及谱分析范围。如果信号的最高频率不变，采样频率不能降低，如何改变参数将谱分辨率提高一倍。

解：

$$T_{p\min}=\frac{1}{F}=\frac{1}{10}=0.1\text{s}$$

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

$$T_{\max}=\frac{1}{F_{s\min}}=\frac{1}{2\times 2500}=0.2\times 10^{-3}\text{s}$$

$$N_{\min}=\frac{F_{s\min}}{F}=\frac{2\times 2500}{10}=500$$

$$\frac{F_s}{2}=\frac{F_{s\min}}{2}=\frac{2\times 2500}{2}=2500$$

要求：谱分辨率提高一倍，采样频率不变$\Rightarrow F'=\frac{1}{2}F=5$

应对方法：增加记录时间，增加采样点数

$$T_{p\min}=\frac{1}{F'}=\frac{1}{5}=0.2\text{s}$$

$$N_{\min}=\frac{F_{s\min}}{F'}=\frac{2\times 2500}{5}=1000$$

实际采样频率可以选择作为信号最高频率的 3-4 倍，采样点数要满足 2 的整数次幂。

西电通院复试mcw9i9cet
西电通院电院AI考研Q群：680630306

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

第五章 数字滤波器的基本概念及一些特殊滤波器

1. 数字滤波器的基本概念

（1）滤波：
- 将输入信号的某些频率成分或某个频带进行压缩、放大
- 对信号进行检测
- 对参数估计

（2）
- 数字滤波器：通过对输入信号进行数值运算的方法来实现滤波
- 模拟滤波器：用电阻、电容、电感及有源器件等构成滤波器对信号进行滤波。

（3）实现方法：
- 用软件在计算机上实现
- 用专用的数字信号处理芯片
- 用硬件

（4）★★★可实现性

要求系统因果稳定 $\Rightarrow$ 系统极点全部集中在单位圆内

要求系统的差分方程的系数或者系统函数的系数为实数 $\Rightarrow$ 系统的零极点必须共轭成对出现，或者是实数

★★★2. *IIR* 和 *FIR* 滤波器的区别

无限脉冲响应滤波器（*IIR*），它的单位脉冲响应为无限长，网络中有反馈回路。

其系统函数为 $$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r \cdot z^{-r}}{1-\sum_{r=1}^{N} G_r \cdot z^{-r}}$$

有限脉冲响应滤波器（*FIR*），它的单位脉冲响应为有限长，网络中没有反馈回路。

其系统函数为 $H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot z^{-n}$，$h(n)$ 为其单位脉冲响应

★★★3. 理想滤波器

三个重要特点：

①在滤波器的通带内幅度为常数（非零），在阻带中幅度为零

②具有线性相位

③单位脉冲响应是非因果无限长序列

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

但所有的理想滤波器（包括理想低通、理想高通、理想带通和理想带阻）的单位脉冲响应都是非因果无限长序列，不能具体实现，只能将其截断并移位，实行近似实现。*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

★★★4. 用 z 平面零极点放置法设计简单滤波器的基本原理

极点放置在要加强的频率点附近（单位圆内），极点越靠近单位圆，频率响应的峰值越高。

零点放置在要减弱的频率附近，零点越靠近单位圆，频率响应的谷值越小。另外还有两个约束条件：①所有极点必须在单位圆内，以保证滤波器的因果稳定

②所有零极点必须共轭成对，或者是实数，以保证滤波器的系数是实数，使系统实现算法中只有实数乘法，便于硬件实现。

5. 一阶数字滤波器 $\begin{cases}\text{具有一个极点}\\ \text{零点可以有一个，也可以没有}\end{cases}$

一阶低通滤波器：系统函数 $H(z)=\dfrac{1-a}{2}\cdot\dfrac{1+z^{-1}}{1-a\cdot z^{-1}}$ ，$0<a<1$

$3dB$ 带宽 β 与极点 a 有关　$\beta=1-a$ 。

一阶高通滤波器：系统函数 $H(z)=\dfrac{1-a}{2}\cdot\dfrac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}}$ ，$0<a<1$

$$\beta=1-a$$

因为要保证滤波器的系数是实的，因此一阶滤波器只有一阶低通和一阶高通滤波器。

6. 二阶数字滤波器 $\begin{cases}\text{2个极点，零点可以有1 个或2 个，也可以没有}\\ \text{且滤波器的零点和极点是共轭成对出现的}\end{cases}$

系统函数 $H(z)=G\cdot\dfrac{(z-b_1)(z-b_2)}{(z-p_1)(z-p_2)}$

G 为常数，一般取 G 使幅度特性的最大值为 1；p_1，p_2 为共轭极点；b_1，b_2 为共轭零点

由于有两个共轭成对的极点和零点，通过选择极、零点位置，可以形成低

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

通、高通、带通等滤波器。

7. 低通和高通之间的简单变换

a. 由低通到高通，传输函数之间的关系为 $H_{hp}\left(e^{j\omega}\right)=H_{lp}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$

b. 由低通到高通，单位脉冲响应之间的关系为 $h_{hp}(n)=(-1)^n \bullet h_{lp}(n)$

c. 由低通到高通，低通滤波器的差分方程为

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}G_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{N}b_k x(n-k)$$

则高通滤波器的差分方程为:

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}(-1)^k \bullet G_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{N}(-1)^k b_k x(n-k)$$

8. 数字谐振器，是一个二阶滤波器，也是一个特殊双极点带通滤波器;

它有一对共轭极点 $re^{\pm j\omega_0}$ ， r 接近于 1，幅度特性在 ω_0 附近最大，相当于在该频率发生了谐振。

$$\begin{cases}\text{(1)零点在原点，一堆共轭极点为} p_{1,2}=re^{\pm j\omega_0}, 0<r<1 \quad H(z)=\dfrac{b_0}{\left(1-re^{j\omega_0}z^{-1}\right)\left(1-re^{-j\omega_0}z^{-1}\right)} \\ \text{(2)两个零点分别放置在} z=1 \text{ 和} z=-1 \text{ 处，一对共轭极点为} P_{1,2}=re^{\pm j\omega_0}, 0<r<1 \\ \quad H(z)=\dfrac{b_0\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-re^{j\omega_0}z^{-1}\right)\left(1-re^{-j\omega_0}z^{-1}\right)}\end{cases}$$

当极点很接近单位圆时，谐振频率近似为 ω_0， $3dB$带宽为 $\Delta\omega=2(1-r)$

应用：适合作带通滤波器，以及语音发生器。

9. 数字陷波器：二阶滤波器，它的幅度特性在 $\omega=\pm\omega_0$ 处为零，在其他频率上接近于常数，是一个滤除单频干扰的滤波器。带宽

系统函数： $H(z)=\dfrac{\left(z-e^{j\omega_0}\right)\left(z-e^{-j\omega_0}\right)}{\left(z-ae^{j\omega_0}\right)\left(z-ae^{-j\omega_0}\right)}, 0\le a<1$ $3dB$ 带宽 $2\beta=2(1-a)$

如果 a 比较小，缺口将比较大，对 $\omega=\pm\omega_0$ 近邻的频率分量影响显著。

a 越大，即极点越靠近零点（越靠近单位圆），陷波器的 3dB 带宽越窄。

应用：一般仪器或设备都用 50Hz 的交流电源供电，因而信号中时常带有 50Hz 的干扰，希望将它滤除，又不影响该信号。可以用这种数字陷波器对信

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

号进行滤波

★10. 全通滤波器

如果滤波器的幅度特性在整个频带$[0,2\pi]$上均等于常数，或者等于 1。

即$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=1,\ \ 0\le\omega\le 2\pi$，则该滤波器称为全通滤波器。

特点：信号通过全通滤波器后，其输出的幅度特性保持不变，仅相位发生变化（纯相位滤波器）。

系统函数：$H(z)=\dfrac{\sum_{k=0}^{N}a_k\bullet z^{-N+K}}{\sum_{k=0}^{N}a_k\bullet z^{-k}}$ 或者 $H(z)=\prod_{k=1}^{N}\dfrac{z^{-1}-z_k^*}{1-z_k^*\bullet z^{-1}}$

如果z_k是零点，z_k^*也是零点，则$P_k=z_k^{-1}$和$P_k^*=\left(z_k^{-1}\right)^*$是极点，极点和零点互为共轭倒易关系（关于单位圆对称）。

应用：一般作为相位校正。

★11. 最小相位滤波器：所有的零极点位于单位圆内，称为最小相位滤波器$H_{\min}(z)$。

性质：*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

（1）任何一个因果稳定的滤波器$H(z)$均可以用一个最小相位滤波器和一个全通滤波器$H_{ap}(z)$级联构成，即 $H(z)=H_{\min}(z)H_{ap}(z)$。

（2）对同一系统函数幅度特性相同的所有因果稳定系统中，最小相位系统的相位延迟最小。

（3）最小相位系统保证它的逆系统因果稳定。

重要结论：凡是将零点（或极点）以共轭倒易关系从单位圆外（内）搬到单位圆内（外），则滤波器的幅频特性不变。

12. 梳状滤波器：

一般梳状滤波器在单位圆上有等间隔的若干零点，可以滤除在这些零点频率上的频率分量。为了在滤除单一频率的同时尽量不损伤有用信号，希望离开零点频率后，幅度特性很快回升。

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

系统函数$H(z)$ 传输函数$H\left(e^{j\omega}\right)$ --周期2π

原理：$\Downarrow z=z^N$

系统函数$H\left(z^N\right)$传输函数$H\left(e^{j\omega N}\right)$ --周期$\frac{2\pi}{N}$

例：$H(z)=1+z^{-1}$，这是一个简单的低通滤波器，它阻止π频率通过，加极点后形成系统函数$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+az^{-1}}$。如果将$z$用$z^{-N}$代替，就形成有$N$个零点的梳状滤波器，系统函数$H(z)=\frac{1+z^{-N}}{1+az^{-N}}$。假设$N=4$，零点为$z_0=e^{j\frac{\pi}{4}}, z_1=e^{j\frac{3\pi}{4}}, z_2=e^{j\frac{5\pi}{4}}, z_3=e^{j\frac{7\pi}{4}}$，极点为$p_0=\sqrt[4]{a}\bullet e^{j\frac{\pi}{4}}, p_1=\sqrt[4]{a}\bullet e^{j\frac{3\pi}{4}}$，$p_2=\sqrt[4]{a}\bullet e^{j\frac{5\pi}{4}}, p_3=\sqrt[4]{a}\bullet e^{j\frac{7\pi}{4}}$，滤除的信号频率为$\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$。

13. 正弦波发生器：如果有极点在单位圆上，则可以形成一个正弦波发生器，利用单位圆上有极点系统不稳定的原理形成的。

西电通院复试mcw9i9cet 西电通院电院AI考研Q群：680630306

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

第六章 IIR 数字滤波器设计

一．学习重点：1. 建立滤波器设计的正确概念，掌握模拟滤波器的设计方法。

2. 掌握数字滤波器的设计方法。

二．知识点总结：

1. 数字滤波是指通过对输入信号进行数值计算，让输入信号有用的频率成分以较高的保真度通过，滤除（阻止）某些无用的频率成分，实现对输入信号的选频处理。

2. 数字滤波器与模拟滤波器相比较，有哪些优点？

处理精度高、稳定性好、体积小、实现方法灵活、不存在阻抗匹配问题，可以实现模拟滤波器无法实现的特殊滤波功能。

3. 数字滤波器 $\begin{cases}\text{无限长单位脉冲响应数字滤波器（}IIRDF\text{）}\begin{cases}\text{间接设计法}\\\text{直接设计法}\end{cases}\\\text{有限长单位脉冲响应数字滤波器（}FIRDF\text{）}\end{cases}$

4. 模拟滤波器的一般设计过程：

（1）根据信号处理要求确定设计指标；

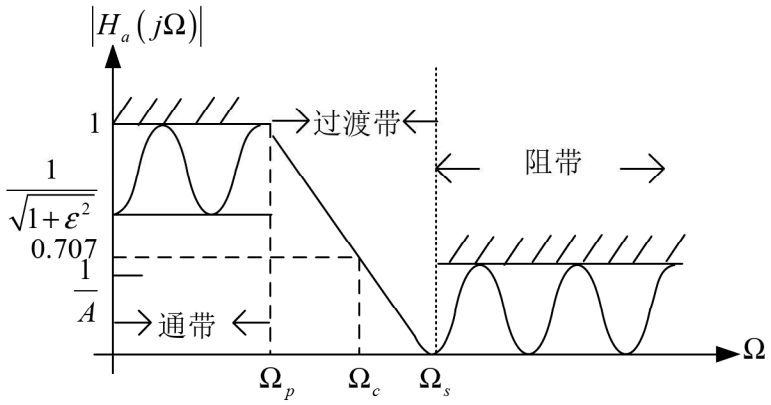
（2）选择滤波器类型；

（3）计算滤波器阶数；

（4）通过查表或计算确定滤波器系统函数 $H_a(s)$；

（5）综合实现并装配调试；

★5. 模拟滤波器的设计指标



Ω_p：通带边界频率

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

Ω_s：阻带边界频率

ε：通带波纹幅度参数；ε 越小，通带波纹幅度越小

A：阻带波纹幅度参数；A 越大，阻带波纹幅度越小

α_p：通带最大衰减（或称为通带峰值波纹）

α_s：阻带最小衰减

Ω_c：3dB 截止频率*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

$$\alpha_p = -20\lg\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right) = 10\lg\left(1+\varepsilon^2\right)dB \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\alpha_p}{10}}-1}$$

$$\alpha_s = -20\lg\frac{1}{A} = 20\lg A dB \Rightarrow A = 10^{\frac{\alpha_s}{20}}$$

α_p越小，通带逼近误差就越小；α_s越大，阻带逼近误差就越小

6. 损耗函数（衰减函数）$\alpha(\Omega) = -20\lg\left|H_a(j\Omega)\right| = -10\lg\left|H_a(j\Omega)\right|^2$。

当$\alpha(\Omega) = 3dB$时，边界频率为3dB 截止频率Ω_c。

优点：损耗函数对幅频响应$\left|H_a(j\Omega)\right|$的取值非线性压缩，放大了小的幅度，从而可以同时观察通带和阻带幅频特性的变化情况。

7. 附加参数：

（1）过渡比（选择性参数）　　$k = \dfrac{\Omega_p}{\Omega_s}$

① k 值越接近于 1，过渡带越窄（选择性越好）

② 低通滤波器，$k < 1$

（2）偏离函数　　$k_1 = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}$

当ε 越小，同时 A 越大时，k_1 才越小，则通带和阻带的波纹就越小。

k_1 表示滤波器通带和阻带偏离所逼近常数的精度，一般$k_1 \ll 1$。

★8. 频率变换与高通、带通及带阻滤波器设计一般过程：

①通过频率变换公式，先将希望设计的滤波器指标转换为相应的低通原型滤波

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

器指标。

②设计相应的归一化低通原型系统函数$Q(p)$。

③对$Q(p)$进行频率变换得到希望设计的滤波器系统函数$H_d(s)$。

9. 频率变换。从p域到s域映射的可逆变换记为$p=F(s);s=F^{-1}(p)$

则转换关系为：$\begin{cases} H_d(s)=Q(p)\big|_{p=F(s)} \\ Q(p)=H_d(s)\big|_{s=F^{-1}(p)} \end{cases}$。

λ：模拟低通原型滤波器参数；　　Ω：希望设计的模拟滤波器参数

10. 从低通到高通的频率转换

（1）映射关系　$p=\dfrac{\lambda_p \cdot \Omega_{ph}}{s}$　　λ_p：低通通带边界频率　λ称为归一化频率

Ω_{ph}：高通通带边界频率

（2）在虚轴上，频率变换公式　$\lambda=-\dfrac{\lambda_p \Omega_{ph}}{\Omega}$，归一化后　$\lambda_p=1$

（3）将通带边界频率为λ_p的低通原型滤波器的系统函数$G(p)$，转换成通带边界频率为Ω_{ph}的高通滤波器系统函数为：　$H_{Hp}(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{\lambda_p \cdot \Omega_{ph}}{s}}$

11. 从低通到带通的频率变换

（1）低通到带通的频率变换公式：$p=\lambda_p \dfrac{s^2+\Omega_0^2}{B_w s}$

（2）在p平面与s平面虚轴上的频率关系为：$\lambda=-\lambda_p \dfrac{\Omega_0^2-\Omega^2}{\Omega B_w}$

（3）$G(p)$转换为带通滤波器的系统函数为：　$H_{Bp}(s)=G(p)\Big|_{p=\lambda_p \frac{s^2+\Omega_0^2}{B_w \cdot s}}$

$B_w=\Omega_{pu}-\Omega_{pl}$：带通滤波器的通带宽度

Ω_0：带通滤波器的中心频率。

$\Omega_{pl}\Omega_{pu}=\Omega_{sl}\Omega_{su}=\Omega_0^2$

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

12. 从低通到带阻的频率变换

（1）低通到带阻的频率变化公式为：　$p=\lambda_s \dfrac{B_w s}{s^2+\Omega_0^2}$　$(\lambda_p \quad or \quad \lambda_s\ ?)$

（2）在 p 平面与 s 平面虚轴上的频率变换关系为：

$$\lambda=-\lambda_s \frac{\Omega \bullet B_w}{\Omega_0^2-\Omega} \quad (\lambda_p \quad or \quad \lambda_s)$$

（3）将阻带边界频率为 λ_s 的低通原型滤波器 $G(p)$ 转换为所希望的带阻滤波器的系统函数为：　$H_{Bp}(s)=G(p)\Big|_{p=\lambda_s \bullet \frac{B_w \bullet s}{s^2+\Omega_0^2}}$

$B_w=\Omega_{su}-\Omega_{sl}$：带阻滤波器的阻带宽度

Ω：带阻滤波器的中心频率

$\Omega_{pl}\Omega_{pu}=\Omega_{sl}\Omega_{su}=\Omega_0^2$

★13. 高通、带通、带阻 *IIR* 数字滤波器设计

（1）采用模拟域频率变换设计高通、带通和带阻数字滤波器的步骤。

①用 $\Omega=\dfrac{2}{\mathrm{T}}\tan\dfrac{\omega}{2}$ 对所期望的数字滤波器 $H(z)$ 的数字边界频率预畸变，得到同类型的模拟滤波器 $H_a(s)$ 的边界频率。

②用模拟域频率变换公式，将 $H_a(s)$ 设计指标转换成相应的模拟低通原型滤波器 $G(p)$ 的设计指标。

③设计模拟低通原型滤波器 $G(p)$。

④模拟域频率变换，即将模拟低通圆形滤波器 $G(p)$ 转换成所希望模拟滤波器 $H_a(s)$。*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

⑤用双极性变换法将 $H_a(s)$ 转换成所希望的 IIR 数字滤波器系统函数 $H(z)$。

（2）采用数字域频率变换设计高通、带通及带阻数字滤波器的步骤

①用 $\Omega=\dfrac{2}{T}\tan\dfrac{\omega}{2}$ 对所期望的数字滤波器 $H(z)$ 的数字边界频率预畸变，得到

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

同类型的模拟滤波器$H_a(s)$的边界频率。

②用模拟域频率变换公式，将$H_a(s)$设计指标转换成相应的模拟低通原型滤波器$G(p)$的设计指标。

③设计模拟低通原型滤波器$G(p)$。

④用双极性变换法将$G(p)$转换成*IIR*数字低通滤波器系统函数$H_{Lp}(z)$。

⑤数字域频率变换，即将$H_{Lp}(z)$转换成所希望设计的IIR数字滤波其系统函数$H(z)$。

14. *IIR*数字滤波器的频率变换。　　见P_{173} 表6.2.1

★15. 几种典型的模拟滤波器*AF*：

（1）巴特沃思模拟滤波器：幅频特性单调下降，但选择性差。

（2）切比雪夫Ⅰ型滤波器：幅频响应在通带内等波纹，阻带单调下降，选择性比切比雪夫Ⅱ型好。

（3）切比雪夫Ⅱ型滤波器：幅频响应在通带内单调下降，阻带等波纹。

（4）椭圆滤波器：选择性好，但通带和阻带均为等波纹。

（5）贝塞尔滤波器：通带内有较好的线性相位特性。

★16. 给定模拟滤波器设计指标，要求设计阶数较低的滤波器，可选用椭圆滤波器。

★17. AF的比较：

（1）在相同阶数N，相同通带最大衰减，阻带最小衰减要求下，巴特沃思滤波器的过渡带最差；椭圆滤波器的过渡带最窄；两种类型的切比雪夫滤波器的过渡带宽度相等，介于巴特沃思滤波器和椭圆滤波器。

（2）在相同指标要求下，巴特沃思滤波器阶数最高，切比雪夫次之，椭圆滤波器的阶数最低。

（3）巴特沃思、切比雪夫Ⅰ型、切比雪夫Ⅱ型和椭圆滤波器是主要考虑逼近幅度响应指标的滤波器，贝塞尔滤波器是主要考虑逼近线性相位特性的滤波器。

（4）贝塞尔滤波器在整个通带逼近线性相位特性，而其幅频特性的过渡带比

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

其他四种滤波器宽得多。

（5）就满足滤波器幅频响应指标而言，椭圆滤波器的性能价格比最高，应用较广泛。

★18. 模拟归一化低通滤波器的设计（以巴特沃思 AF 为例）

（1）根据指标参数计算阶数 N 及 $3dB$ 截止频率。

$$N=\frac{\lg\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}\right)}{\lg\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s}\right)}=\frac{\lg k_1}{\lg k}$$ 阶数 N 必须是整数。

$$\Omega_c=\frac{\Omega_p}{\frac{1}{\varepsilon^N}}$$ 满足通带指标，阻带指标有富裕。

$$\Omega_c=\frac{\Omega_s}{\left(A^2-1\right)^{\frac{1}{2N}}}$$ 满足阻带指标，通带指标有富裕。

（2）巴特沃思模拟低通滤波器的系统函数也完全由 $3dB$ 截止频率和阶数 N 确定。

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^N}{D_N(s)}$$ $D_N(s)$：N 阶巴特沃思多项式。

（3）归一化 N 阶巴特沃思模拟低通滤波器的系统函数。

$G(p)=\frac{1}{D_N'(p)}$ $D_N'(p)$：归一化 N 阶巴特沃思多项式（查表）。P_{139}表6.1.1

$\lambda=\frac{\Omega}{\Omega_c}$ 称为归一化频率。

（4）去归一化得到所要设计的 N 阶巴特沃思模拟低通滤波器系统函数

$$H_a(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$$

★19. 用间接法设计 *IIR* 数字滤波器的过程

（1）确定数字滤波器指标

（2）将数字滤波器指标转换成相应的过渡模拟滤波器指标

（3）设计满足指标要求的过渡模拟滤波器 $H_a(s)$

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

（4）将过渡模拟滤波器 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$。

20. 将模拟边界频率化成数字边界频率。

$$\omega_p = \frac{\Omega_p}{F_s} = \frac{2\pi f_p}{F_s}$$

$$\omega_s = \frac{\Omega_s}{F_s} = \frac{2\pi f_s}{F_s}$$

F_s 表示采样频率

21. 过渡模拟滤波器转换为数字滤波器的要求　　$H_a(s) \Rightarrow H(z)$

（1）因果稳定的模拟滤波器 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$ 仍因果稳定。即 s 平面的左半开平面 $R_c[s]<0$ 应映射到 z 平面的单位圆以内 $|z|<1$

（2）数字滤波器 $H(z)$ 的频率响应特性能近似模仿 $H_a(s)$ 的片段常数频率响应特性。即 s 平面的虚轴应映射到 z 平面的单位圆 $e^{j\omega}$ 上。

22. *IIR* 数字滤波器的设计方法
- 间接法
  - 脉冲响应不变法
  - 双极性变换法
- 直接法
  - 零极点累试法
  - 频域逼近法
  - 时域逼近法

★23. 脉冲响应不变法。　例题见 P162 例 6.2.2

（1）基本思想：设模拟滤波器的单位冲激响应为 $h_a(t)$，对 $h_a(t)$ 等间隔采样，得到数字滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$：

$$h(n) = h_a(nT) \qquad H(z) = ZT[h(n)]$$

这样就可以将模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器系统函数 $H(z)$。*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

（2）方式：

$$H_a(s) \xrightarrow{\text{拉氏逆变换}} h_a(t) \xrightarrow{\text{等间隔采样}} h(n) \xrightarrow{\text{Z变换}} H(z)$$

①将 $H_a(s)$ 用部分分式展开：$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

②直接将 s 平面极点 S_k 映射成 z 平面极点 e^{S_kT} $H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-e^{S_kT}\bullet z^{-1}}$

且满足 $h(n)=h_a(nT)$，T 为采样间隔

（3）$H_a(j\Omega)$ 与 $H(e^{j\omega})$ 的关系

$$H_a(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}H_a\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$

$$H(e^{j\Omega T})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}H_a\left[j\left(\Omega-\frac{2\pi k}{T}\right)\right]$$

（4）实际公式 $H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{T\bullet A_k}{1-e^{S_kT}\bullet z^{-1}}$ $H(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}H_a\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$

$H(e^{j\omega})$ 为 $H_a(j\Omega)$ 的周期拓展函数。$\omega=\Omega T$ 为线性关系

24. 脉冲不变法的优缺点：

优点：①数字频率与模拟频率之间是线性关系 $\omega=\Omega T$

②如果模拟滤波器具有带限特性，而且 T 满足采样定理，则数字滤波器频率响应完全模仿了模拟滤波器频率响应。

缺点：一般模拟滤波器不是带限的，所以实际上总是存在频谱混叠失真。频谱混叠失真会使数字滤波器在 $\omega=\pi$ 附近的频率响应偏离模拟滤波器频响特性曲线，混叠严重时，可使数字滤波器不满足阻带衰减指标。所以，脉冲响应不变法不适合设计高通和带阻滤波器。（原因）

25. 当给定数字滤波器指标时，采样周期的取值对频谱混叠程度影响很小，所以一般取 $T=1\text{s}$ 使设计运算最简单。

26. 脉冲响应不变法基本设计思想是波形逼近

双极性变换法设计思想是算法逼近

27. 双极性变换法★

（1）设计思想：双极性变换法从原理上彻底消除了频率混叠失真。其设计思想是算法逼近，用差分近似微分，用相邻两个采样的平均值近似微分方程中的瞬时值 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$，将 AF 的微分方程变成差分方程，经 z 变换

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

得到$H(z)$。

（2）双极性映射公式　　$H(z)=H_a(s)\Big|_{S=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

（3）ω与Ω的关系：$\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$，$T$为采样间隔，一般取$T=2\text{s}$。

上式表明双极性变换法存在非线性频率失真，这是该方法的缺点。但正是因为这种非线性失真，将整个模拟频率轴映射成数字频率的主值区间$[-\pi,\pi]$，从而消除了频谱混叠失真。

而且，这种非线性对设计片段常数特性DF基本无影响。但在将DF指标转换成相应的AF指标时，必须进行预畸变校正。

28. 用双极性变换法设计*IIR*数字滤波器的设计步骤如下：★★★

（1）确定数字滤波器指标：$\omega_p,\omega_s,\alpha_p,\alpha_s$　　P$_{167}$ 例 6.2.3

（2）按照$\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$进行非线性预畸变校正，将数字滤波器指标转换成相应的过渡模拟滤波器指标：$\Omega_p=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2}$，$\Omega_s=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_s}{2}$，通带最大衰减和阻带最小衰减分别为$\alpha_p$和$\alpha_s$

（3）设计满足指标要求的过渡模拟滤波器$H_a(s)$。

（4）将模拟滤波器$H_a(s)$转换成数字滤波器，即$H(z)=H_a(s)\Big|_{S=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

只有通过步骤（2）的非线性预畸变校正，才能保证经过步骤（4）的非线性频率畸变，数字滤波器才能满足步骤（1）所给定的设计指标

29. 如果给定数字滤波器技术指标，则T可以任意选取。为什么？

这是因为数字滤波器最高频率为π，所以阻带截止频率$\omega_s<\pi$

对于脉冲响应不变法，相应的过渡模拟滤波器阻带截止频率$\Omega_s=\frac{\omega_s}{T}<\frac{\pi}{T}$，只要阻带最小衰减$\alpha_s$足够大，则频谱混叠失真足够小，使设计的$H(z)$满足数

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

字滤波器技术指标要求。

而双极性变换法无频率混叠，所以T可以任意选取。

30. 如何给定模拟滤波器，T如何选？

T的取值对结果有很大影响，即T不同则$H(z)$不同，频率响应当然也不同。特别是对脉冲响应不变法，T值越大会使频谱混叠失真越严重，设计低通滤波器时，一般要求$\Omega_s < \frac{\pi}{T}$。

31. 双极性变换法仅仅适用于要求片断常数幅频响应指标的数字滤波器的设计。

原因：双极性变换引起数字频率与模拟频率之间的严重非线性畸变，使数字滤波器频率响应曲线不能模仿相应的过渡模拟滤波器频率响应曲线的波形。双极性变换法仅仅保持原模拟滤波器的片段常数幅频响应特性。不能保持原模拟滤波器的相频响应特性，因此，双极性变换法仅仅适用于要求片断常数幅频的响应指标的数字滤波器的设计。

32. *IIR* 网格结构★★★　　参见例题

（1）特点：信号流图中含有反馈支路，即含有环路，递归型结构，其单位脉冲响应是无限长的。

（2）*IIR* 网格基本结构有直接型、级联型、并联型三种。

（3）直接型：①优点：可直接由传输函数或差分方程画出网结构流图，简单直观。

②缺点：a. 调整零极点困难。

b. 对参数的量化非常敏感，这是由极点对系数的变化过于敏感造成的。

c. 容易产生较大误差。

③*IIR* 直接型网格结构需要$M+N+1$次乘法，$M+N$次加法，延迟单元数为M和N中较大的数。

（4）级联型。因式分解 $H(z)=H_1(z)\cdot H_2(z)$

优点：调整相应的参数，很方便地调整零极点的位置。

（5）并联型：将$H(z)$展开成部分分式之和。

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

优点：①调整极点方便

②运算误差最小，运算速度最高

③系数量化误差敏感度低

缺点：系统函数阶数较高时，部分分式展开较难，并且调整零点不如级联型方便。

例. 设 *IIR* 数字滤波器的系统函数为 $H(z)=\dfrac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\dfrac{5}{4}z^{-1}+\dfrac{3}{4}z^{-2}-\dfrac{1}{8}z^{-3}}$

（1）试写出系统的差分方程。

（2）直接型网格结构及相应的转置型网格结构。

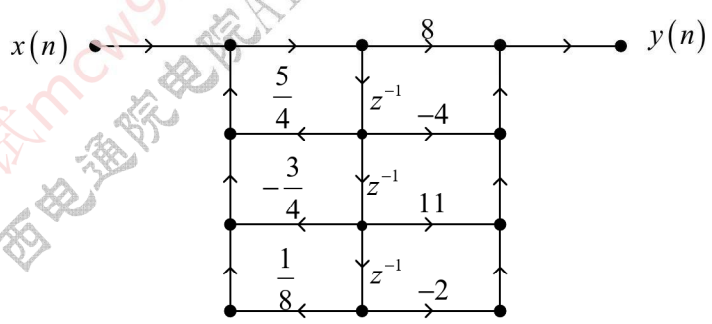
（3）级联型网络结构及相应的转置型结构。

（4）并联型网格结构及相应的转置型结构。

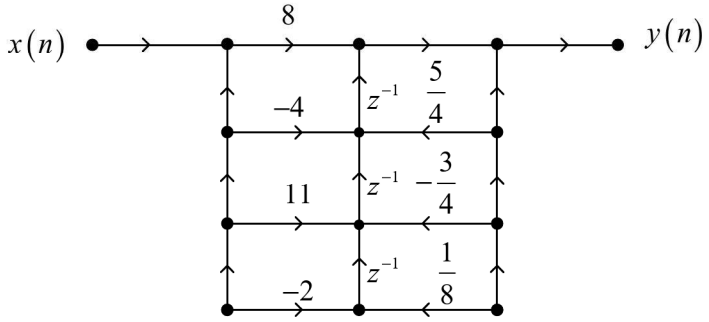
解：（1）差分方程

$$y(n)=\frac{5}{4}y(n-1)-\frac{3}{4}y(n-2)+\frac{1}{8}y(n-3)+8x(n)-4x(n-1)+11x(n-2)-2x(n-3)$$

（2）直接型：



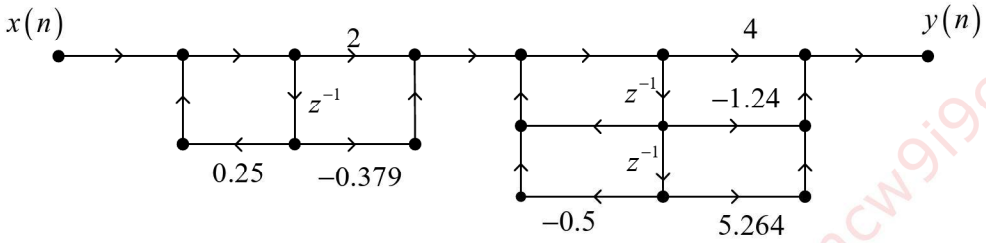
转置型：



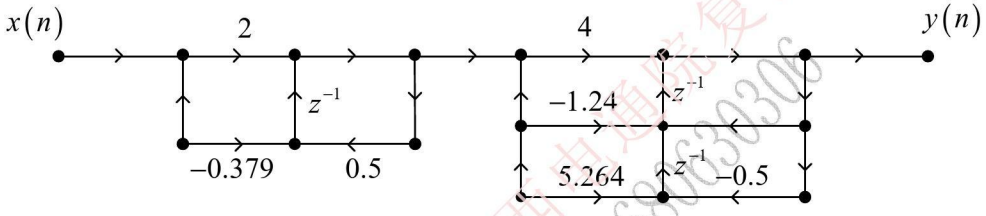
（3）级联型

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

$$H(z)=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}}=\frac{\left(2-0.379z^{-1}\right)\left(4-1.24z^{-1}+5.264z^{-2}\right)}{\left(1-0.25z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}+0.5z^{-2}\right)}$$



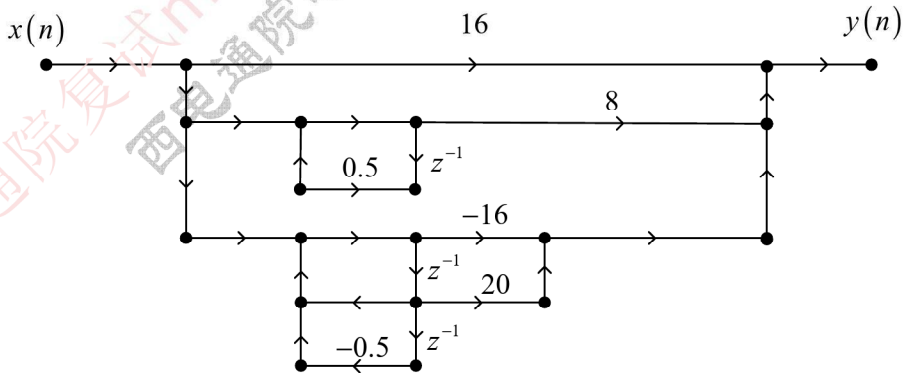
转置型



（4）并联型

$$H(z)=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}}=\frac{\left(2-0.379z^{-1}\right)\left(4-1.24z^{-1}+5.264z^{-2}\right)}{\left(1-0.25z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}+0.5z^{-2}\right)}$$

$$=16+\frac{8}{1-0.5z^{-1}}+\frac{-16+20z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

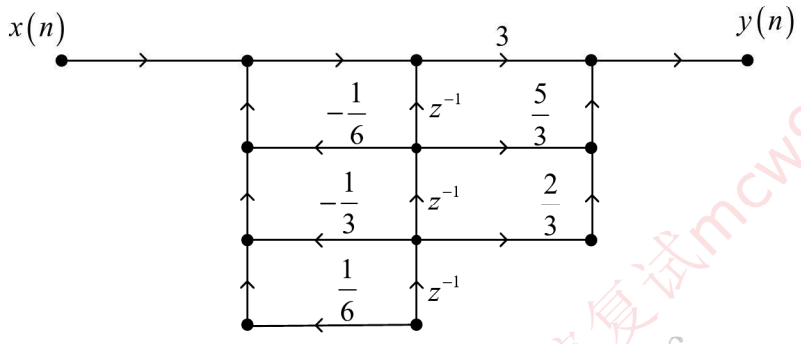


例. 已知某三阶数字滤波器的系统函数为 $H(z)=\dfrac{3+\frac{5}{3}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)}$

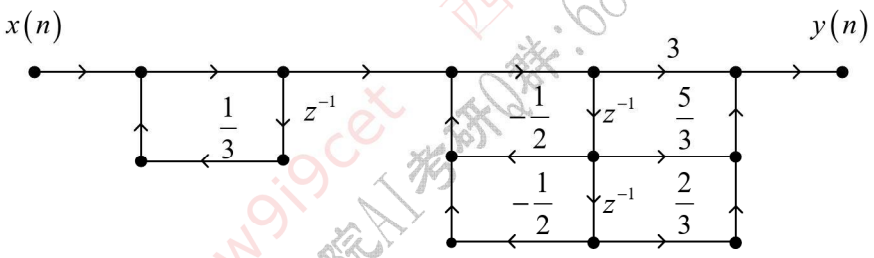
试画出其直接型、级联型和并列型结构。

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

解：（a）直接型：$H(z)=\dfrac{3+\frac{5}{3}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)}=\dfrac{3+\frac{5}{3}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}{1+\frac{1}{6}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}-\frac{1}{6}z^{-3}}$

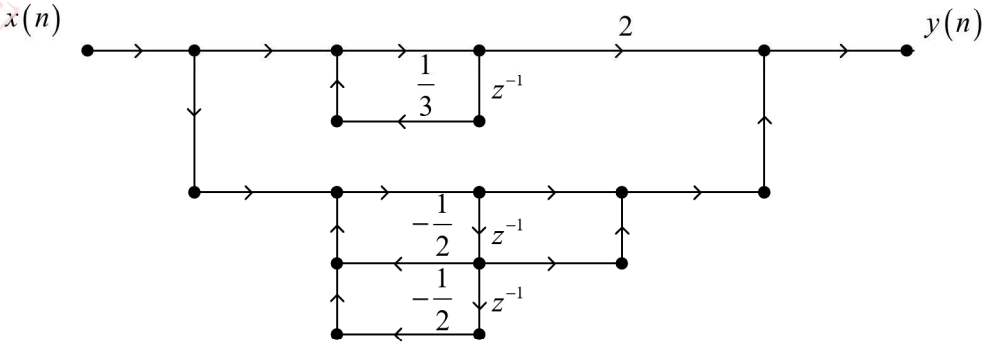


级联型：$H(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\cdot\dfrac{3+\frac{5}{3}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$



并联型 ：

$$H(z)=\frac{3+\frac{5}{3}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$



例. 设计模拟低通滤波器。要求幅频特性单调下降，通带边界频率 $f_p=1kHz$ ，通

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

带最大衰减$\alpha_p=1dB$，阻带边界频率$f_s=5kHz$，阻带最小衰减$\alpha_s=40dB$

解：（1）根据幅频特性单调下降，应选择巴特沃思滤波器。

（2）计算阶数N和$3dB$截止频率Ω_c

求出波纹幅度参数为 $\varepsilon=\sqrt{10^{\alpha_p/20}-1}=\sqrt{10^{1/10}-1}=0.508847$

$$A=10^{\alpha_s/20}=10^{40/20}=100$$

$$k_1=\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}=\frac{0.508847}{\sqrt{9999}}=0.00508875 \qquad k=\frac{\Omega_p}{\Omega_s}=0.2$$

$$N=\frac{\lg k_1}{\lg k_2}=3.2811 \quad \text{取整数}N=4$$

$$\Omega_c=\frac{\Omega_s}{\left(A^2-1\right)^{\frac{1}{2N}}}=\frac{2\pi f_s}{9999^{\frac{1}{8}}}=9934.7125\,rad/s$$

（3）求系统函数：查表得到归一化4阶巴特沃思多项式

$$D_4'(p)=\left(p^2+0.7654p+1\right)\left(p^2+1.8478p+1\right)$$

$$H_a(s)=\frac{1}{D_4'}\bigg|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}=\frac{\Omega_c^4}{\left(s^2+0.7654\Omega_c\bullet s+\Omega_c^2\right)\left(s^2+1.8478\Omega_c\bullet s+\Omega_c^2\right)}$$

$$=\frac{9.7414\times10^{15}}{\left(s^2+7.6040\times10^3 s+9.8699\times10^7\right)\left(s^2+1.8357\times10^4 s+9.8699\times10^7\right)}$$

西电通院复试ncw9i9cet 西电通院复试ncw9i9cet 西电通院电院AI考研Q群:680630306

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

第七章 FIR 数字滤波器设计

1. 有限长单位脉冲响应数字滤波器（*FIRDF*）特点

优点：①可以实现线性相位滤波。

②*FIRDF* 是全零点滤波器，极点在原点，硬件和软件实现结构简单，不用考虑稳定性问题。*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

③任何一个非因果有限长序列，总可以通过一定的延时，转变为因果序列，所以因果性总是满足。

④无反馈运算，运算误差小。

缺点：当幅频特性相同时，*FIRDF* 的阶数比 *IIRDF* 高的多。

2. 线性相位的概念。

设 *FIRDF* 的单位脉冲响应 $h(n)$ 的长度为 N，则其频率响应函数为 $H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cdot e^{-j\omega n}$，$H(e^{j\omega})$ 表示成 $H(e^{j\omega})=H_g(\omega)\cdot e^{j\theta(\omega)}$

$H_g(\omega)$ 称为幅度函数，为 ω 的实数，应注意 $H_g(\omega)$ 与幅频特性函数 $|H(e^{j\omega})|$ 的区别，$|H(e^{j\omega})|$ 为的正实函数，而 $H_g(\omega)$ 可取负值。

$\theta(\omega)$ 称为相位特性函数，当 $\theta(\omega)=-\omega\tau$ 时，称为第一类线性相位特性。当 $\theta(\omega)=\theta_0-\omega\tau$ 时，称为第一类线性相位特性。

★3. 具有线性相位的 *FIRDF* 的特点。[设 $h(n)$ 长度为 N]

（1）时域特点

第一类线性相位特性 $\begin{cases}\theta(\omega)=-\omega\tau\ ,\ \tau=\dfrac{N-1}{2}\ ,\ h(n)\text{关于}\dfrac{N-1}{2}\text{偶对称}\\ h(n)=h(N-1-n)\ ,\ 0\le n\le N-1\end{cases}$

第二类线性相位特性 $\begin{cases}\theta(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}-\omega\tau\ ,\ \tau=\dfrac{N-1}{2}\ ,\ h(n)\text{关于}\dfrac{N-1}{2}\text{奇对称}\\ h(n)=-h(N-1-n)\ ,\ 0\le n\le N-1\end{cases}$

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

群延时：$-\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega}=\tau=\dfrac{N-1}{2}$ 为常数，所以将第一类和第二类线性相位特性统称为恒定群延时特性。

（2）频域特点。P_{180}　表7.1.1

第一类：
- N为奇数（情况1），$H_g(\omega)$关于$\omega=0,\ \pi,2\pi$偶对称，可以实现所有滤波特性（低通，高通，带通，带阻等）。
- N为偶数（情况2），$H_g(\omega)$关于$\omega=\pi$奇对称$\left[H_g(\pi)=0\right]$，关于$\omega=0$和2π偶对称，不能实现高通和带阻滤波器。

第二类：
- N为奇数（情况3），$H_g(\omega)$关于$\omega=0,\ \pi,2\pi$奇对称，只能实现带通滤波器$\left[\text{因为}H_g(0)=H_g(\pi)=H_g(2\pi)=0\right]$。
- N为偶数（情况4），$H_g(\omega)$关于$\omega=0,2\pi$奇对称，关于$\omega=\pi$偶对称，不能实现低通和带阻滤波器。

（3）线性相位$FIRDF$的零点分布特点。

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cdot z^{-n}\qquad h(n)=\pm h(N-1-n)$$

如果z_k是$H(z)$的零点，则z_k^{-1}也是$H(z)$的零点。通常$h(n)$是实序列，$H(z)$的零点呈复共轭对出现，因此z_k^{*}和z_k^{*-1}也是$H(z)$的零点。

线性相位的零点分布：z_k，z_k^{-1}，z_k^{*}，z_k^{*-1}。

4.

$FIRDF$的设计方法：
- 基于逼近理想滤波器特性的方法
  - 窗函数　√
  - 频率采样法　√
  - 等波纹最佳逼近法
- 最优设计法

5.用窗函数法设计的步骤。★★★　P_{192}　例7.2.1

（1）选择窗函数的类型和长度，写出窗函数$\omega(n)$的表达式。

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

根据阻带最小衰减选择窗函数$\omega(n)$的类型，再根据过渡带宽度确定所选窗函数的长度N。

（2）构造希望逼近的频率响应函数　　$H_d\left(e^{j\omega}\right)=H_{dg}(\omega)\bullet e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$

根据设计需要，一般选择线性相位理想滤波器（理想低通，理想高通，理想带通，理想带阻）。理想滤波器的截止频率ω_c近似为最终设计的$FIRDF$的过渡带中心频率，幅度函数衰减一半（约$-6dB$）。所以一般取$\omega_c=\dfrac{\omega_p+\omega_s}{2}$，$\omega_p$和$\omega_s$分别为带通边界频率和阻带边界频率。

（3）计算　　$h_d(n)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d\left(e^{j\omega}\right)\bullet e^{j\omega n}d\omega$

（4）加窗得到设计结果：$h(n)=h_d(n)\bullet\omega(n)$

6. 线性相位理想滤波器表达式：$\alpha=\dfrac{N-1}{2}$

（1）理想低通：$H_{dLp}\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha},0\le|\omega|\le\omega_c\\0,\omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$

（2）理想高通：$H_{dHp}\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha},\omega_c\le|\omega|\le\pi\\0,0<|\omega|\le\omega_c\end{cases}$

（3）理想带通：$H_{dBp}\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha},\omega_{cl}\le|\omega|\le\omega_{ch}\\0,0<|\omega|<\omega_{cl},\omega_{ch}<|\omega|\le\pi\end{cases}$

（4）理想带阻：$H_{dBs}\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha},0<|\omega|\le\omega_{cl},\omega_{ch}<|\omega|\le\pi\\0,\omega_{cl}<|\omega|\le\omega_{ch}\end{cases}$

7. 各种常用的窗函数的技术指标。

P_{191}　例7.2.2　矩形窗，三角窗，汉宁窗，哈明窗，布莱克曼窗，凯赛窗。

8. 加窗后对波性特性的影响

加窗后所得的单位脉冲响应为：$h(n)=h_d(n)\bullet\omega(n)$

频响函数为：$H\left(e^{j\omega}\right)=FT\left[h(n)\right]=\dfrac{1}{2\pi}H_d\left(e^{j\omega}\right)*W\left(e^{j\omega}\right)$

由于$W\left(e^{j\omega}\right)=FT\left[\omega(n)\right]\ne\delta(\omega)$，所以$H\left(e^{j\omega}\right)\ne H_d\left(e^{j\omega}\right)$，二者的误差大小与窗函数$\omega(n)$的类型和长度有关。

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

阻带最小衰减由窗函数类型决定，过渡带宽度由$\omega(n)$长度N确定，而且，对于相同的N值，不同类型的窗函数对应的过渡带宽度可能不同。

一般，阻带最小衰减较大的窗函数，对应的过渡带较宽。

在设计中，根据阻带最小衰减α，选择窗函数类型，再根据过渡带宽度指标选择窗函数长度N的值。

9. 在窗函数设计法中，通带和阻带波纹的改善是以加宽过渡带为代价的。

★10. 频率采样设计法的基本概念。

首先构造一个希望逼近的频率响应函数：$H_d\left(e^{j\omega}\right)=H_{dg}(\omega)\cdot e^{j\theta_d(\omega)}$

对$H_d\left(e^{j\omega}\right)$在$[0,2\pi]$上采样点得到：

$$H(k)=H_d\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\quad,\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

所设计$FIRDF$的单位脉冲响应：

$$h(n)=IDFT\left[H(k)\right]=\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\cdot W_N^{-kn}\quad,\quad n=0,1,2,\cdots,N-1$$

系统函数为：$H(z)=ZT\left[h(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cdot z^{-n}$

根据z域内插公式，可以直接由频率采样表示系统函数。

$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

11.

频率采样法设计$FIRDF$主要关心的问题
1. 实现线性相位$H_d(k)$应满足的条件
2. 逼近误差
3. 改进措施

12. 设计线性相位$FIRDF$对$H_d\left(e^{j\omega}\right)$和$H(k)$的约束条件

$$H(k)=H_d\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=A(k)\cdot e^{j\theta(k)}\quad,\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

$A(k)$为幅度采样，$\theta(k)$为相位采样

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

$$H(k)=H_d\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=H_{dg}(\omega)\cdot e^{j\theta_d(\omega)}\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

则 $A(k)=H_{dg}\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$ ， $k=0,1,2,\cdots,N-1$

（1）对第一类线性相位 $FIRDF$ $h(n)=h(N-1-n)$ ， $\theta(\omega)=-\omega\tau=-\omega\frac{N-1}{2}$

$$\theta(k)=-\omega\frac{N-1}{2}\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=-\frac{N-1}{N}\pi k \quad ， \quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

N 为奇数时（情况 1） $A(k)=A(N-k)$ ， $H_{dg}(\omega)=H_{dg}(2\pi-\omega)$

N 为偶数时（情况 2） $A(k)=-A(N-k)$ ， $H_{dg}(\omega)=-H_{dg}(2\pi-\omega)$

（2）对第二类线性相位 $FIRDF$ $h(n)=-h(N-1-n)$

$$\theta(k)=-\frac{\pi}{2}-\omega\frac{N-1}{2}\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=-\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{N}\pi k \quad ， \quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

N 为奇数时（情况 3） $A(k)=-A(N-k)$ ， $H_{dg}(\omega)=-H_{dg}(2\pi-\omega)$

N 为偶数时（情况 4） $A(k)=A(N-k)$ ， $H_{dg}(\omega)=H_{dg}(2\pi-\omega)$

注意：在设计高通和带阻滤波器时，N 只能取奇数。

13. 频率采样法设计步骤。★★★

（1）根据阻带最小衰减选择过渡带采样点的个数 m

m	1	2	3
d_s	$44-54dB$	$65-75dB$	$85-95dB$

（2）确定过渡带宽度 ΔB ，按照 $N\geq\frac{2\pi(m+1)}{\Delta B}$ 估算滤波器长度 N 。

（3）构造一个希望逼近的频率响应函数。 $H_d\left(e^{j\omega}\right)=H_{dg}(\omega)\cdot e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$

（4）进行频率采样 $H(k)=H_d\left(e^{j\omega}\right)|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=A(k)\cdot e^{-j\frac{N-1}{N}\pi k}$ ， $k=0,1,2,\cdots,N-1$

$$A(k)=H_{dg}\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \quad ， \quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

并加入过渡带采样。*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

（5）对$H(k)$进行N点$IDFT$得到第一类线性相位$FIRDF$的单位脉冲响应为

$$h(n)=IDFT\left[H(k)\right]=\frac{1}{N}\bullet\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\bullet W_N^{-kn}\quad,\quad n=0,1,2,\cdots,N-1$$

（6）检验设计结果

如果阻带最小衰减未达到指标要求，则要求改变过渡带采样值，直到满足指标要求为止。

如果滤波器边界频率未达到指标要求，则要微调$H_{dg}(\omega)$的边界频率。

14. 窗函数设计法和频率采样法简单方便，易于实现，但他们存在以下缺点：

（1）滤波器边界频率不易精确控制

（2）窗函数设计法总使通带和阻带波纹幅度相等，频率采样法智能控制阻带波纹幅度，所以两种方法都不能分别控制通带和阻带波纹幅度。但是工程上对二者的要求是不同的，希望能分别控制。

（3）所设计的滤波器在阻带边界频率附近的衰减最小，距阻带边界频率越远，衰减越大。这两种设计方法存在较大的资源浪费，或者说所设计滤波器的性能价格比偏低。

15. IIR和FIR数字滤波器的比较。★★★　　P_{212}

	FIR	IIR
性能	严格线性相位，但成本高，运算量大，信号延时也较大。	存储单元少，运算量小，经济高效，以相位的非线性为代价。
设计结果	可得到幅频特性（可以多带）和线性相位（最大优点）。	只能得到幅频特性，相频特性未知（一大缺点）。 如需要线性相位，须用全通网络校准，但增加滤波器阶数和复杂性。
稳定性	极点全部位于原点（永远稳定），无稳定性问题。	有稳定性问题。
阶数	高	低
结构	非递归结构	递归结构

更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

设计工具	只有计算程序可循	可借助于模拟滤波器的成果
快速算法	可用 FFT 实现，减少计算量	无快速运算方法

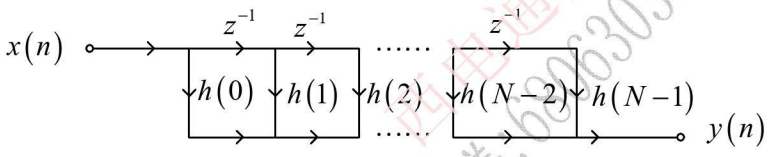
16. FIR 的网格结构：直接型，级联型，线性相位结构，频率采样结构。

17. FIR 的差分方程：$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)\bullet x(n-k)$

系统函数：$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\bullet z^{-n}$

N 为滤波器的长度。$N-1$ 为阶数

18. 直接型结构：



长度为 N 的滤波器直接型结构需要 $N-1$ 个单位延时器，$N-1$ 个乘法器，$N-1$ 个加法器。

19. FIR 级联型结构。

将 $H(z)$ 进行因式分解，并将共轭成对的零点放在一起，形成系数为实数的二阶网络。这样把系数为实数的一阶或二阶网络级联起来，形成 FIR 的级联结构。

相对于直接型结构来说，级联型结构调整方便，但级联型结构需要的乘法器比较多。*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

★20. 线性相位结构。

（1）FIR 线性相位系统单位脉冲响应：

$$h(n)=\pm h(N-1-n)\quad +偶对称\quad -奇对称$$

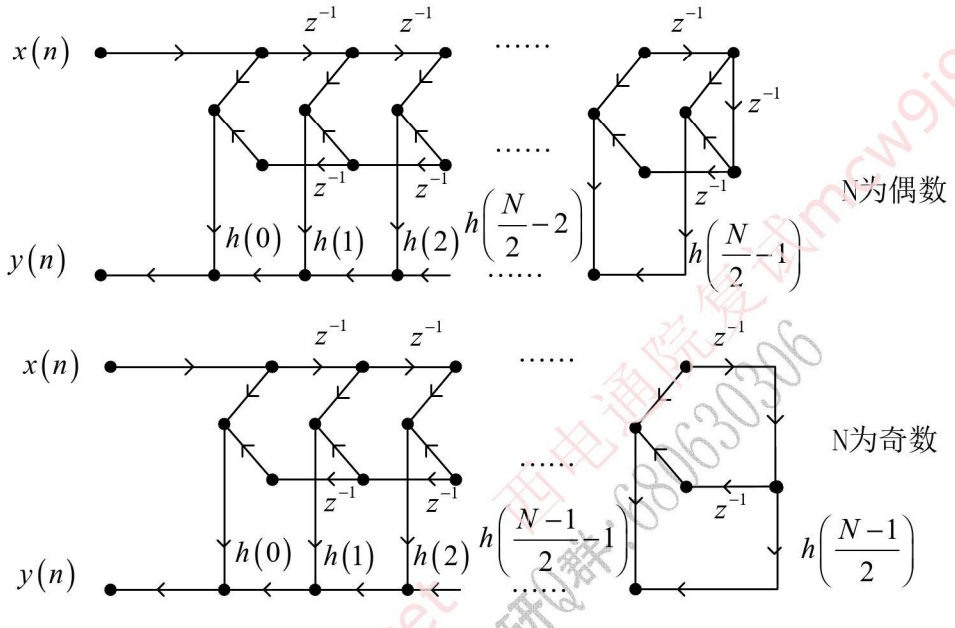
（2）FIR 线性相位系统系统函数：

N 为偶数时：$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)\left[z^{-n}\pm z^{-(N-1-n)}\right]$

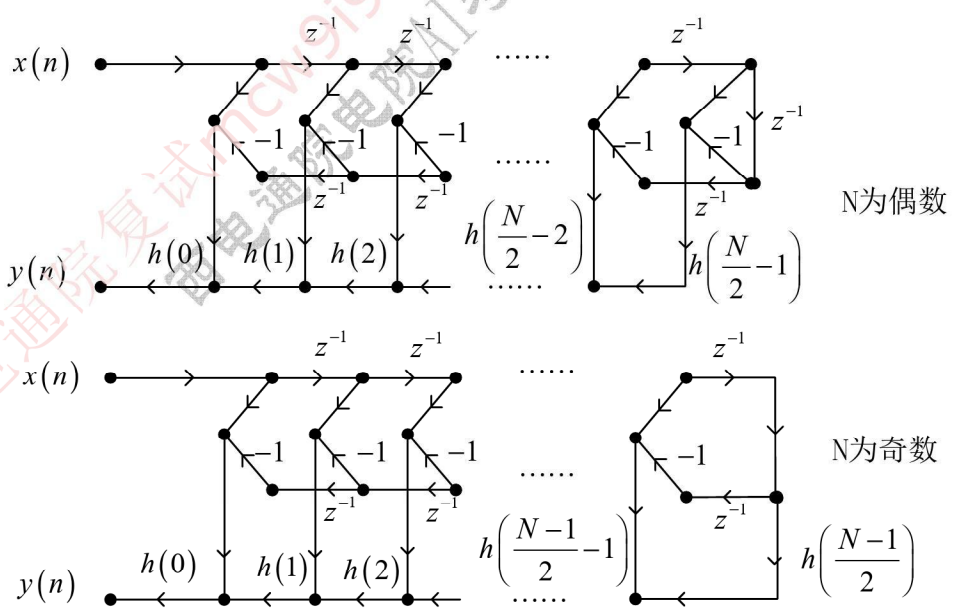
N 为奇数时：$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)\left[z^{-n}\pm z^{-(N-1-n)}\right]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)\bullet z^{-\frac{N-1}{2}}$

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

（3）和直接型结构相比，如果 N 取偶数，直接型结构需要 N 个乘法器，而线性相位结构减少到 $\frac{N}{2}$ 个乘法器，节约了一半乘法器。如过 N 取奇数，则乘法器减少到 $\frac{N+1}{2}$ 个，也节约了近一半的乘法器。



第一类线性相位网络结构流图



第二类线性相位网络结构流图

21. 频率采样结构

由频率域采样定理知道，如果在频率的 $0\sim2\pi$ 区间，对系统的传输函数采样

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

N 点，且 N 大于等于系统单位脉冲响应的长度 M 。

则 $H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$ $\qquad H(k)=H(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$ ， $k=0,1,2\cdots,N-1$

22. 频率采样法的优缺点

优点：①在频率采样点 ω_k ， $H\left(e^{j\omega_k}\right)=H(k)$ ，这正是乘法器的系数，调整该系数能直接调整频率特性。

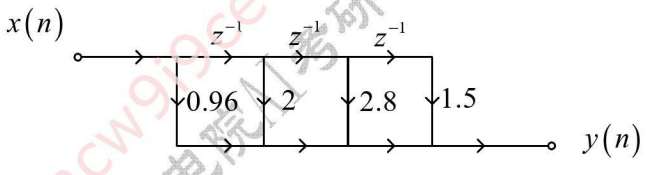
②对于任意滤波器，只要 $h(n)$ 的长度 N 相等，除乘法器的系数 $H(k)$ 不同外，其他结构包括梳状滤波器和并联一阶或二阶网络均一样，因此便于实现标准化、模块化。

缺点：当 N 比较大时，二阶网络很多，使乘法器，延时器很多，造成结构复杂。

例：设 FIR 网络系统函数如下式 $\quad H(z)=0.96+2z^{-1}+2.8z^{-2}+1.5z^{-3}$

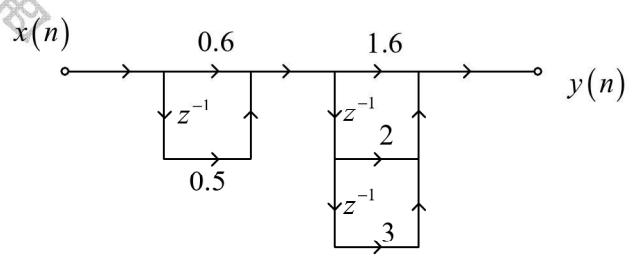
画出它的直接型结构和级联型结构

解：直接型结构



级联型结构

$$H(z)=\left(0.6+0.5z^{-1}\right)\left(1.6+2z^{-1}+3z^{-2}\right)$$



例：设 FIR 滤波器的系统函数为 $H(z)=\frac{1}{10}\left(1+0.9z^{-1}+2.1z^{-2}+0.9z^{-3}+z^{-4}\right)$

求出其单位脉冲响应，判断是否具有线性相位，画出直接型结构和线性相位型结构（如果存在）

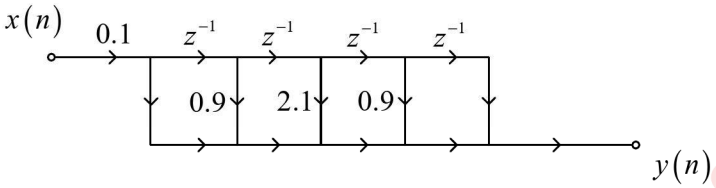
解：单位脉冲响应

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

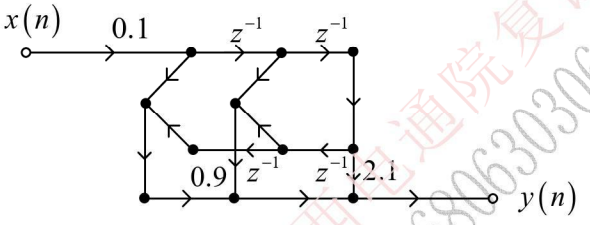
$$h(n)=\frac{1}{10}\left[\delta(n)+0.9\delta(n-1)+2.1\delta(n-2)+0.9\delta(n-3)+\delta(n-4)\right]$$

序列长度为$N=5$，序列关于$n=2$偶对称，因此系统具有线性相位性质。

直接型结构



线性相位型结构



西电通院复试mcw9i9cet
西电通院电院AI考研Q群：680630306

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

第八章 时域离散系统的实现

1. *FIR* 网格结构

2. *FIR* 网格结构

3. 格型网格结构。可用于 *IIR* 系统，也可用于 *FIR* 系统。

优点：对有限字长效应的敏感度低，且适合递推算法。在一般数字滤波器，自适应滤波器和线性预测等有广泛的应用。

分为：
- 全零点格型网格结构
- 全极点格型网格结构
- 有极点和零点滤波器的格型结构

★4. 数字信号处理中的量化效应

DSP 系统处理的信号均采用二进制码表示，而存放二进制码的寄存器均为有限位，造成的误差均是因数值量化引起的，故称量化误差。

一般量化误差表现在三个方面：

（1）A/D 变换器中的量化效应。

（2）系数量化效应。

（3）运算中的量化效应。

这些量化效应均是因计算机中寄存器的有限位引起的，统称为有限寄存器长度效应。

5. 尾数处理有两种方法：

截尾法：将尾数的第 $b+1$ 位数，以及后面的二进制数码全部略去。

舍入法：将第 $b+1$ 位按逢 1 进位，逢 0 不进位，然后将第 $b+1$ 位以后略去。

6. A / D 变换器中的量化效应

A / D 变换器具体完成将模拟信号转换成数字信号的作用，它的位数是有限长的，因此存在量化误差。

7. 系数量化效应*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

系统对输入信号进行处理时需要若干参数或者叫系数，这些系数都要存储在有限位数的寄存器中，因此存在系数的量化效应。

系数的量化误差直接影响系统函数的零极点位置，如果发生了偏移，会使系统的频率响应偏离理论设计的频率响应，不满足实际需要。量化误差严重时，极

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

点移到单位圆上或者单位圆外，造成系统的不稳定。

系数量化效应直接和寄存器的长度有关，但也和系统的结构有关。

8. 运算中的量化效应

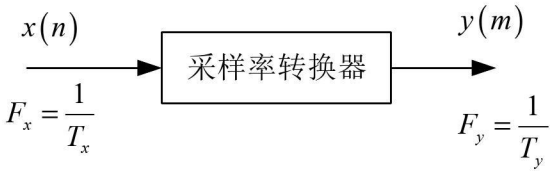
数字信号处理的实际运算包括乘法和加法。在定点制运算中，乘法运算会使位数增多，如超出计算机的寄存器的长度，需要进行尾数处理。尾数处理有截尾法和舍入法两种。但不管哪一种方法都会引起误差，称为运算量化误差。

西电通院复试mcw9i9cet 西电通院电院AI考研Q群:680630306

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

第九章 多采样率数字信号处理

★1. 采样率转换模型



用 $F_x=\frac{1}{T_x}$ 表示输入信号 $x(n)$ 的采样频率

用 $F_y=\frac{1}{T_y}$ 表示输出信号 $y(m)$ 的采样频率。

（1）整数因子抽取：$F_y=\frac{F_x}{D}$，D 为正整数，表示对每隔 $D-1$ 个样值抽取 1 个，使采样率降低为原采样率的 $\frac{1}{D}$。

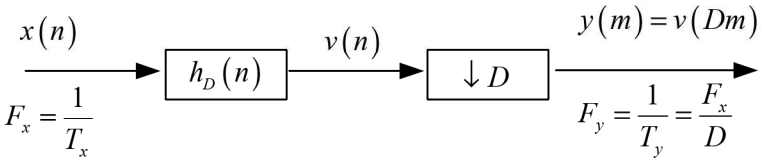
（2）整数因子插值：$F_y=I\bullet F_x$，I 为正整数，表示对 $x(n)$ 的两个相邻样值之间插入 $I-1$ 个新的样值，使采样率提升为原采样率的 I 倍。

（3）有理数因子采样率转换：$\frac{F_y}{F_x}=\frac{I}{D}$，$D$ 和 I 是互素整数，这种采样率转换，使采样率变为原采样率的 $\frac{I}{D}$ 倍。

（4）任意因子采样率转换：$\frac{F_y}{F_x}$ 为任意有限数。

★★★2. 整数因子 D 抽取*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

（1）原理方框图



（2）整数因子抽取功能：

输出端信号采样频率 F_y 降为输入端信号采样频率 F_x 的 $\frac{1}{D}$，即 $F_y=\frac{F_x}{D}$

（3）学习要点及重要公式

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

经过抽取使采样率降低，会引起新的频谱混叠失真，所以，必须在抽取前进行抗混叠滤波。

抗混叠滤波器$h_D(n)$的指标：根据采样定理，抗混叠滤波器的阻带截止频率为：$f_s=\frac{F_y}{2}=\frac{F_x}{2D}Hz$

相应的数字阻带截止频率为$\omega_s=\frac{2\pi f_s}{F_x}=\frac{\pi}{D}rad$

应当注意：由于抗混叠滤波器工作于输入信号采样频率F_x，所以上式中用换算得到相应的数字截止频率，绝对不能用F_y换算。抗混叠滤波器的通带截止频率（或过渡带宽度）取决于抽取系统对信号频谱的失真度要求。

整数因子抽取器的输入输出关系式：$y(m)=v(Dm)=\sum_{k=0}^{\infty}h_D(k)\bullet x(Dm-k)$

（4）用ω_x和ω_y分别表示$x(n)$和$y(m)$数字频率，则

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=2\pi f\bullet T_x=\frac{2\pi f}{F_x}\\ \omega_y&=2\pi f\bullet T_y=\frac{2\pi f}{F_y}\end{aligned}\right\}\text{且}F_y=\frac{F_x}{D}\quad\Rightarrow\quad\omega_y=D\bullet\omega_x$$

经过按整数因子D抽取，使数字频率区间$0\le|\omega_x|\le\frac{\pi}{D}$扩展成相应的频率区间$0\le|\omega_y|\le\pi$。

所以经过整数因子D抽取，$X(e^{j\omega})$中$\frac{\pi}{D}<|\omega_x|$的非零频谱就会在$\omega_y=\pi$附近形成混叠。所以必须设计抗混叠滤波器来滤除$\frac{\pi}{D}\le|\omega_x|\le\pi$上的频谱。

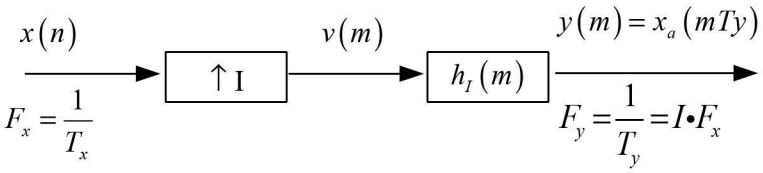
（5）抗混叠低通滤波器$h_D(n)$的频率响应。

$$H_D(e^{j\omega})=\begin{cases}1\quad,\quad|\omega|<\frac{\pi}{D}\\ 0\quad,\quad\frac{\pi}{D}\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

3. 整数因子内插器★

（1）原理框图

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666



（2）整数因子内插器功能

输出端信号采样频率F_y提高为输入端信号采样频率F_x的I倍，即$F_y = IF_x$。

（3）$\omega_y = \dfrac{\omega_y}{I}$

$V\left(e^{j\omega_y}\right)$是原输入信号频谱$X\left(e^{j\omega_x}\right)$的$I$次镜像周期重复，周期为$\dfrac{2\pi}{I}$。

把$V\left(e^{j\omega_y}\right)$在频段$\dfrac{\pi}{I} \le |\omega_y| \le \pi$的周期重复谱称为“镜像谱”。

（4）镜像滤波器$h_I(n)$的作用是滤除$V\left(e^{j\omega_y}\right)$的镜像谱，让$y(m)$频谱尽量无失真地通过。

阻带截止频率：$f_s = \dfrac{1}{2}F_x$

相应的数字阻带截止频率：$\omega_s = \dfrac{2\pi f_s}{F_y} = \dfrac{\pi}{I} rad$

理想情况下，镜像频谱滤波器的频率响应函数：$H_I\left(e^{j\omega_y}\right) = \begin{cases} C, & 0 \le |\omega_y| \le \dfrac{\pi}{I} \\ 0, & \dfrac{\pi}{I} < |\omega_y| \le \pi \end{cases}$

C为定标系数：作用，在$m = 0, \pm I, \pm 2I, \pm 3I, \cdots$时，确保输出序列$y(m) = x\left(\dfrac{m}{I}\right)$

$C = I$

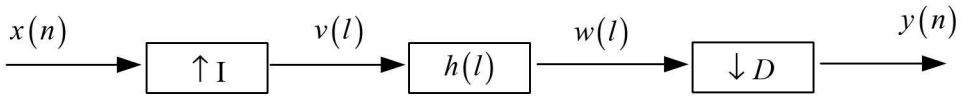
（5）时域输入输出关系式：$y(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_I(m - kI) \bullet x(k)$

（6）输出信号频谱（理想情况下）$Y\left(e^{j\omega_y}\right) = \begin{cases} I \bullet X\left(e^{j\omega_y}\right), & 0 \le |\omega_y| \le \dfrac{\pi}{I} \\ 0, & \dfrac{\pi}{I} < |\omega_y| \le \pi \end{cases}$

4. 有理数因子I/D采样转换系统

（1）原理框图

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666



（2）功能：首先，对输入序列$x(n)$按整数因子I内插，然后再对内插器的输出序列，按整数因子D抽取，达到按有理数因子I/D的采样率转换$F_y=\frac{I}{D}F_x$。

（3）学习要点及重要公式

滤波器$h(l)$同时完成镜像滤波和抗混叠滤波功能。

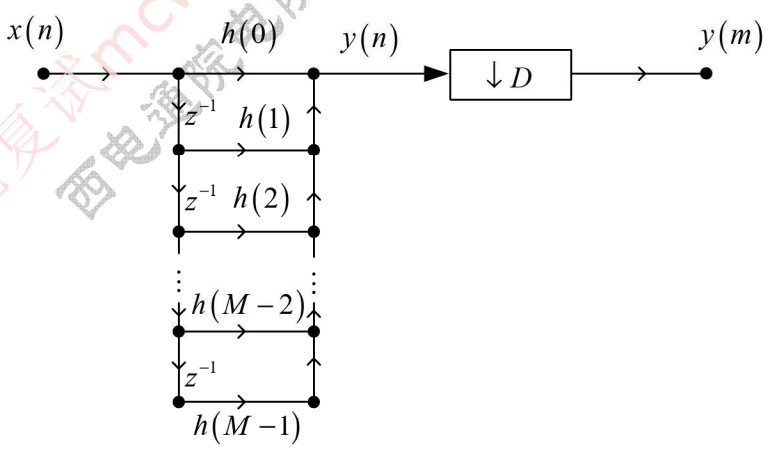
理想情况下，滤波器$h(l)$是理想低通滤波器，其频率响应为

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases} I \quad , \quad 0\le|\omega|<\min\left[\frac{\pi}{I},\frac{\pi}{D}\right] \\ 0 \quad , \quad \min\left[\frac{\pi}{I},\frac{\pi}{D}\right]\le|\omega|\le\pi \end{cases}$$

输入输出关系式：$y(m)=\omega(Dm)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(D_m-kI)\cdot x(k)$

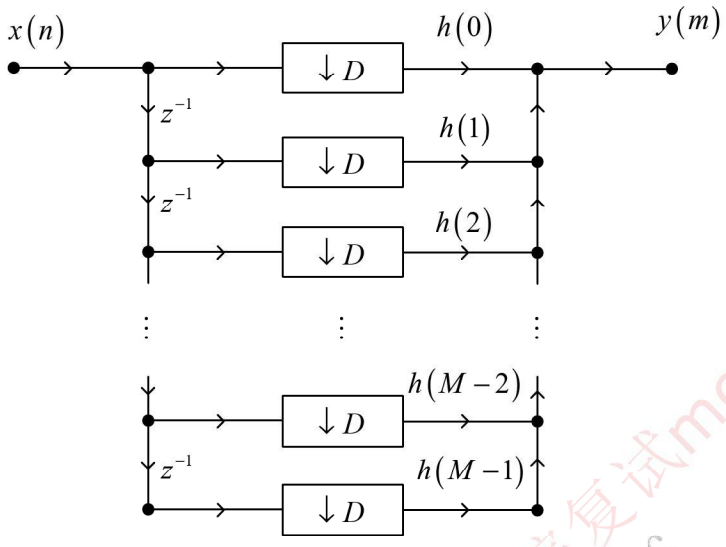
5. 高效实现结构的基本思想：将*FIR*滤波器的乘法和加法运算移到系统中采样率最低处。

6. 整数因子D抽取系统的直接型*FIR*滤波器结构★



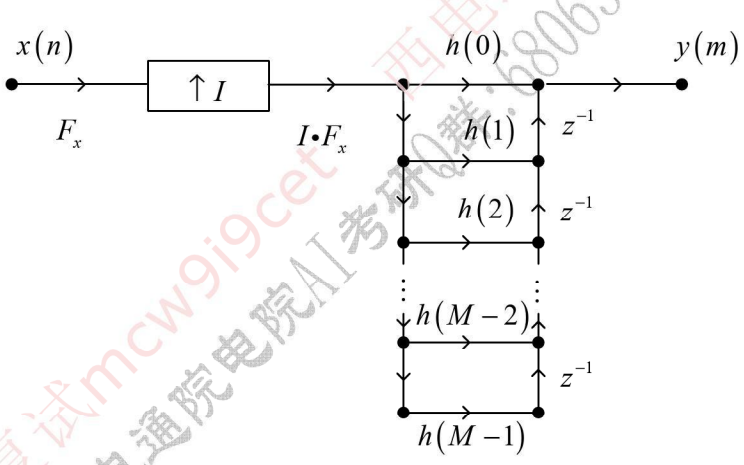
西电通院复试mcw9i9cet 西电通院电院AI考研Q群:680630306

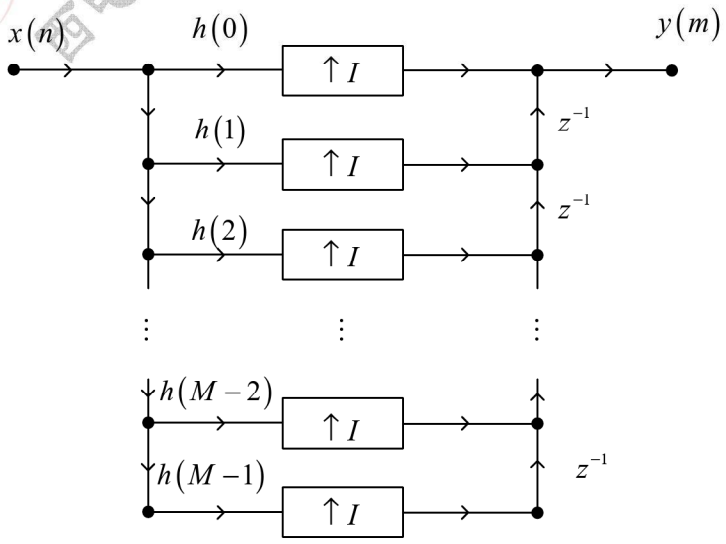
更多考研咨询，请加西电通院电院AI考研Q群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666



FIR 高效实现结构

★7. 整数因子 I 内插系统的直接型 *FIR* 滤波器结构

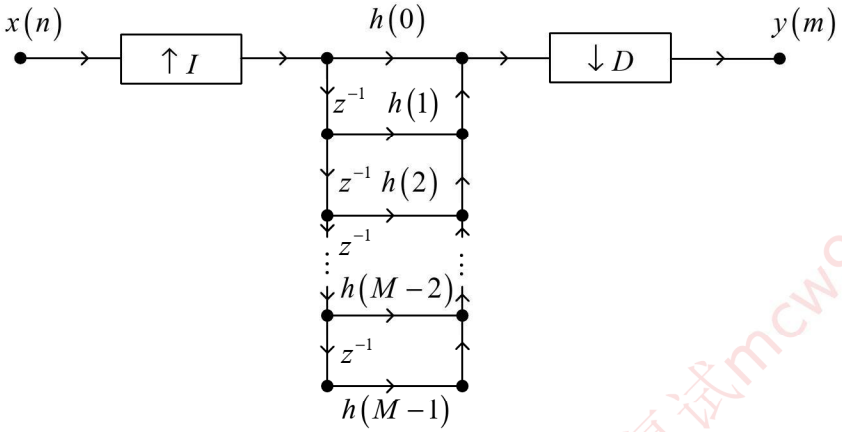




高效实现结构

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

8. 按有理数因子 I/D 的采样率转换系统的高效 *FIR* 滤波器结构



①当 $I>D$ 时，$F_y>F_x$，将直接型 *FIR* 结构与前面的 $\uparrow I$ 用整数因子内插系统的高效 *FIR* 滤波器结构代替即可。*(西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306)*

②当 $I<D$ 时，$F_y<F_x$，将直接型 *FIR* 结构与后面的 $\downarrow D$ 用整数因子 D 抽取系统的高效 *FIR* 滤波器结构代替即可。

西电通院复试mcw9i9cet 西电通院电院AI考研Q群:680630306

更多考研咨询，请加西电通院电院 AI 考研 Q 群：680630306、晋程猫头哥微信：jcmtg666

免责声明

晋程考研辅导班所建的 QQ 群和钉钉群仅供讨论考研、学习相关的内容，为营造良好的学习氛围，群成员不得发布或传播反动、暴力、恐怖言论等违法信息，不得有辱骂、诽谤、言语攻击他人以及其他妨碍他人学习交流的行为。请各位成员认真遵守上述纪律，群管理员有权将违反纪律者移除相应群并无条件终止服务。

该材料为晋程考研辅导班的内部赠送电子材料，仅供个人登录晋程考研提供的账号和密码线上观看学习或打印使用，该电子材料为非卖品，禁止盗版，翻印，传播等侵权行为。

以上声明最终解释权归晋程考研所有。

西电通信复试mcw9i9cet