一. 信号与系统的基本概念

1. 复习内容.

连续信号与离散信号的定义、分类和特性，信号的基本描述方法。信号的基本运算，奇异函数及相应性质。系统的基本概念、分类和描述方法，线性时不变系统的概念和性质.

2. 具体要求.

(1) 连续信号与离散信号的定义，函数表示和波形表示 ★

(2) 信号的时移、反折和尺度变换，微积分运算. ★★★

(3) 单位阶跃函数和单位冲激函数的定义及相应性质. ★★★

(4) 系统分类和系统描述. ★

(5) 线性时不变系统的性质和判断. ★★★

(一) 信号的定义：信号是载有信息的随时间变化的物理量或物理现象.

(二). 信号的分类：

1. 信号是否可以用确定的时间函数表示 { 是：确定信号（规则信号）
否：随机信号.

2. 信号自变量是否连续 { 连续时间信号：时间是连续的.
离散时间信号：时间是离散的.

3. 函数取值是否具有周期性 { 周期信号：{ $f(t)=f(t+mT)$ —最小的T值—"周期"
$f(k)=f(k+mN)$ —最小的整数的N值.
非周期信号.

注意：① 连续的正弦(或余弦)函数 $\sin\omega t$ [或 $\cos\omega t$] 一定是周期信号，其周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$；

② 离散的正弦(或余弦)序列 $\sin\theta k$ [或 $\cos\theta k$] (其中θ称为数字角频率，单位为rad)，只有当 $\frac{2\pi}{\theta}$ 为有理数时才是周期序列. 其周期为 $N=M\cdot\frac{2\pi}{\theta}$，$M$取使 N 为整数的最小整数.

③ 两个连续周期信号之和不一定是周期信号，只有当该两连续信号的周期 T_1 与 T_2 之比为有理数时，其和信号才是周期信号，其周期 T 等于 T_1、T_2 的最小公倍数.

④ 两个离散周期序列之和一定是周期序列，其周期 N 等于两个序列周期的最小公倍数.

例1-1. 判别下列各序列是否为周期性的，如果是周期性的，确定其周期.

(1) $f_1(k)=\sin(\frac{2\pi}{7}k+\frac{\pi}{6})$　　(2) $f_2(k)=\cos(\frac{5\pi}{6}k+\frac{\pi}{12})$　　(3) $f_3(k)=\cos(\frac{1}{5}k+\frac{\pi}{3})$

解：(1) $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{7}}=14$. 周期序列. $N=14$

(2) $\frac{2\pi}{\frac{5}{6}\pi}=\frac{12}{5}$. 周期序列　$N=12$.

(3) $\frac{2\pi}{\frac{1}{5}}=10\pi$ 为无理数. 非周期序列.

4. 根据函数取值是否为实数 { 实信号：物理可实现信号
复信号

5. 根据信号的能量或功率是否为有限值 { 功率信号 $0<P<\infty$, $E=\infty$
能量信号 $0<E<\infty$, $P=0$

将信号施加到1Ω电阻上，消耗的能量 $E=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt$. $E=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|f(k)|^2$

消耗的功率 $P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2dt$. $P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{\frac{N}{2}}|f(k)|^2$.

(三) 信号的基本运算

1. 加减法：$f(\cdot)=f_1(\cdot)\pm f_2(\cdot)$

2. 乘法：$f(\cdot)=f_1(\cdot)f_2(\cdot)$

3. 平移：$f(t)\to f(t+a)$ { $a>0$ 左移 $|a|$ 个单位
$a<0$ 右移 $|a|$ 个单位

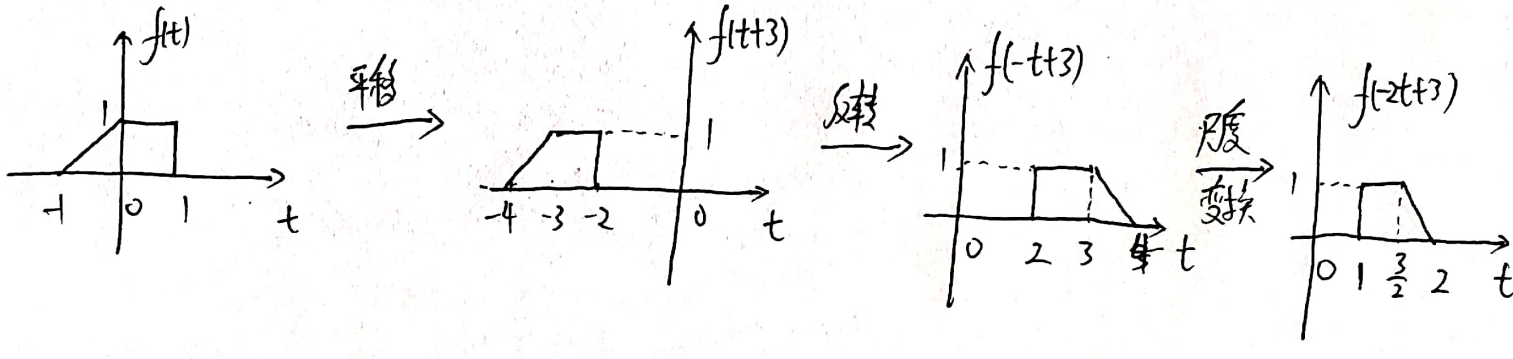
对 t：左加，右减.

4. 反转(反折)：$f(t)\to f(-t)$ 将信号沿纵轴对折

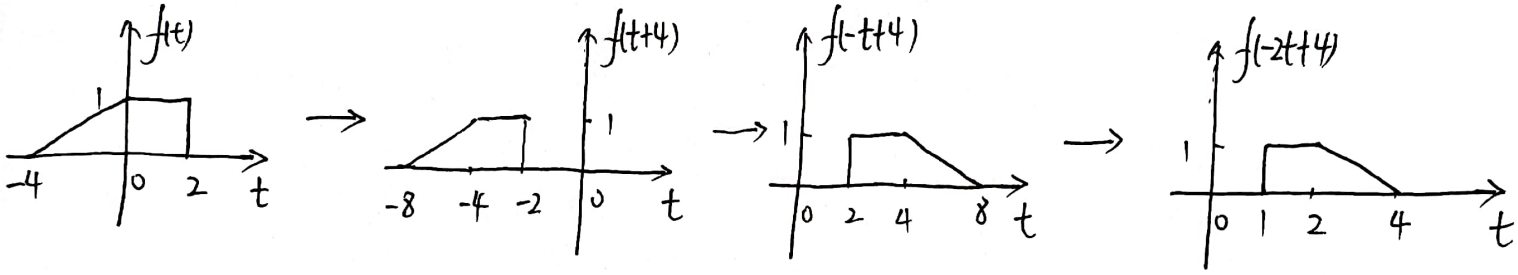
5. 尺度变换：$f(t)\to f(at)$ { $a>1$ 将 t 轴压缩至原来的 $\frac{1}{a}$
$0<a<1$ 将 t 轴展宽至原来的 $\frac{1}{a}$ 倍
纵轴保持不变.

6. 综合应用 $f(t)\to f(at+b)$ 通常 $a<0$ 按平移→反转→尺度变换.

例1-2. $f(t)\to f(-2t+3)$



例1-3. $f(t) \to f(-2t+4)$

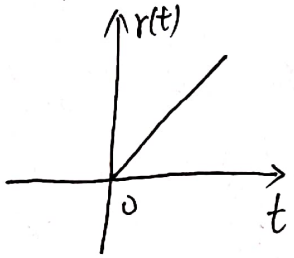


7. 反向运算. $f(at+b) \to f(t)$ 按尺度变换 → 反转 → 平移.

(四) 阶跃函数和冲激函数.

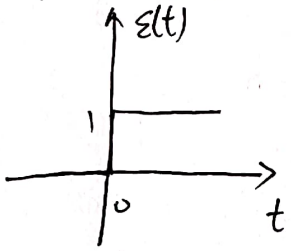
1. 奇异信号：函数本身或其各阶导数或其各次积分，具有不连续性.

(1) 斜升函数 $r(t)$

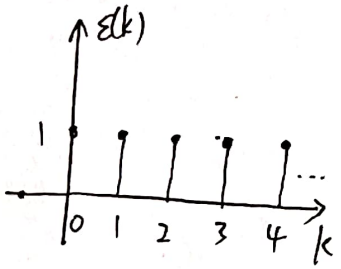


$$r(t) = t\varepsilon(t) = \begin{cases} t, & t>0 \\ 0, & t\le 0. \end{cases}$$

(2) 阶跃函数 $\varepsilon(t)$

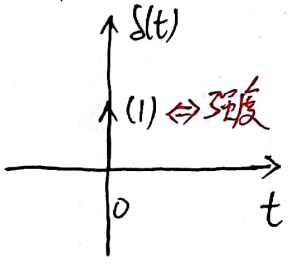


$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{1}{2}, & t=0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$$



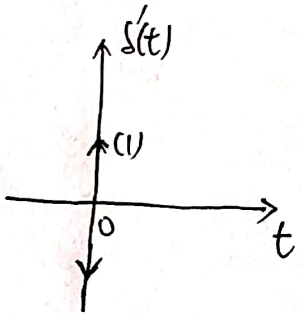
$$\varepsilon(k) = \begin{cases} 0, & k<0 \\ 1, & k\ge 0 \end{cases}$$

(3) 冲激函数 $\delta(t)$



$\delta(t)=0, \quad t\neq 0$

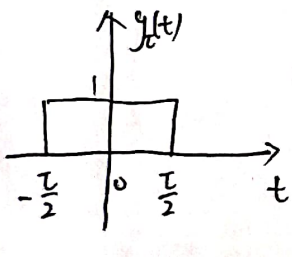
$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$



冲激偶 $\delta'(t)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\,dt = 0$

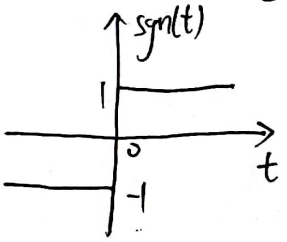
(4) 门函数 $g_\tau(t)$



宽度为 τ.
幅度为 1.

$$g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

(5). 符号函数 sgn(t).



$$sgn(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

2. 关系:

连续信号: $\delta(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$, $\varepsilon(t)=\frac{dr(t)}{dt}$. $\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$.

离散信号: $\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$.

3. 冲激函数的性质.

(1) δ与普通函数的积分

$f(t)\cdot\delta(t)=f(0)\cdot\delta(t)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\delta(t)\,dt=f(0)$

$f(t)\cdot\delta'(t)=f(0)\cdot\delta(t)-f'(0)\cdot\delta(t)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta'(t)\,dt=-f'(0)$.

(2) 移位.

$f(t)\cdot\delta(t-t_0)=f(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\delta(t-t_0)\,dt=f(t_0)$

$f(t)\cdot\delta'(t-t_0)=f(t_0)\cdot\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\delta'(t-t_0)\,dt=-f'(t_0)$

(3). $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$. ; $\delta'(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a}\delta'(t)$; $\delta^{(n)}(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a^n}\cdot\delta^{(n)}(t)$.

(4) 奇偶性: 令 $a=-1$. $\delta(-t)=\delta(t)$. $\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\cdot\delta^{(n)}(t)$ $\begin{cases}n\text{为偶数}\rightarrow\text{偶函数}\\ n\text{为奇数}\rightarrow\text{奇函数}.\end{cases}$

例1-4. 求解下列各式.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(2t-3)\cdot(3t^2+t-5)\,dt$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}2(t^3+4)\,\delta(1-t)\,dt$.

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2t}{t}\cdot\delta(t)\,dt$.

(4) $\int_{-2}^{2}(x-5)\,\delta(x-t)\,dx$.

(5) $\int_{0}^{t}\sin t\cdot\delta(t-3)\,dt$.

(6) $\int_{-10}^{10}(2t^2+t-5)\,\delta'(t+\frac{1}{4})\,dt$.

解 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}(3t^2+t-5)\cdot\delta(2t-3)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}(3t^2+t-5)\cdot\frac{1}{2}\delta(t-\frac{3}{2})\,dt=\frac{1}{2}(3t^2+t-5)\Big|_{t=\frac{3}{2}}=\frac{13}{8}$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}2(t^3+4)\,\delta(1-t)\,dt=2\int_{-\infty}^{+\infty}(t^3+4)\,\delta(t-1)\,dt=2(t^3+4)\Big|_{t=1}=10$.

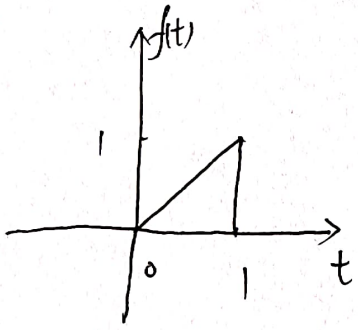
(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2t}{t}\delta(t)\,dt=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2t}{2t}\delta(t)\,dt=2\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}=2$.

(4) $\int_{-2}^{2}(x-5)\delta(x-t)\,dt=\begin{cases}t-5, & -2\le t\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=(t-5)[\varepsilon(t+2)-\varepsilon(t-2)]$

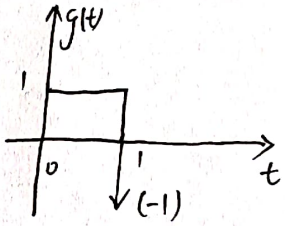
(5) $\int_{0}^{t}\sin t\cdot\delta(t-3)\,dt=\sin 3\cdot\varepsilon(t-3)$ // 3要位于 0~t 内.

(6) $\int_{t_0}^{10}(2t^2+t-5)\cdot\delta'(t+\frac{1}{4})\,dt=-(2t^2+t-5)'\Big|_{t=-\frac{1}{4}}=-(4t+1)\Big|_{t=-\frac{1}{4}}=0$.

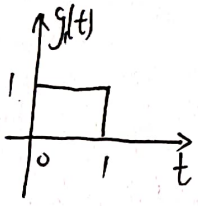
例1-5. 已知$f(t)$波形如下图所示，$g(t)=\frac{d}{dt}f(t)$，画出$g(t)$和$g(2t-1)$的波形.

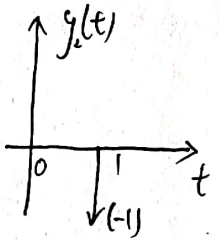


解. $g(t)=\frac{d}{dt}f(t)$

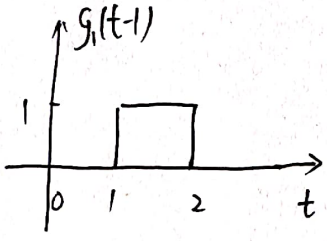


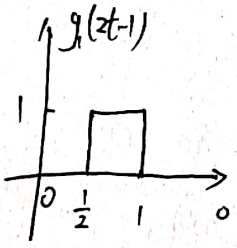
$g(t)=g_1(t)+g_2(t)$





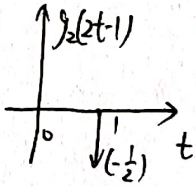
则 $g(2t-1)=g_1(2t-1)+g_2(2t-1)$



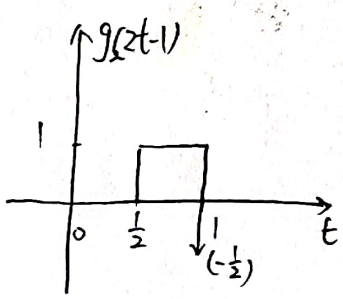


$g_2(t)=-\delta(t-1)$

$g_2(2t-1)=-\delta(2t-1-1)=-\delta(2t-2)=-\frac{1}{2}\delta(t-1)$



所以



注：对冲激函数进行尺度运算时，注意强度的改变.

(五) 系统的描述.

系统类型 / 描述形式		连续系统	离散系统.
方程描述	输入输出方程	$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t)$	$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \cdot y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} \cdot f(k-j)$
	动态方程	$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(t)$ $y(t) = Cx(t) + Df(t)$	$x(k+1) = Ax(k) + Bf(k)$ $y(k) = Cx(k) + Df(k)$
框图描述		回 ① ② ③ 组合连接表述系统.	回 ① ② 组合连接表述系统.
流图描述		信号流图描述是框图描述的简化表示	
冲激函数响应描述	时域	$h(t)$	$h(k)$
系统函数描述	实频域	$H(j\omega)$	$H(e^{j\theta})$
	复频域	$H(s)$	$H(z)$.

说明: ① 系统的各种描述方式之间可以相互转换.

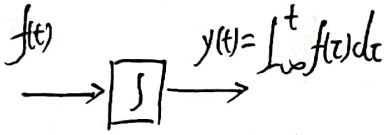
② 对于一个确定的系统, 输入输出方程形式唯一, 系统函数唯一, 而状态方程、框图、信号流图均可有多种形式.

1. 连续系统的框图表示

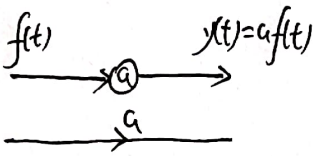
(1) 微分方程的一般形式:

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1f'(t)+b_0f(t)$$

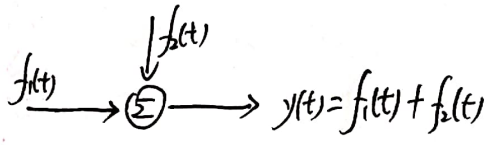
(2) 单元框图



积分器



数乘器

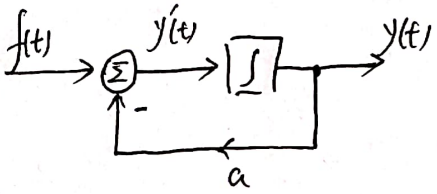


加法器

(输入信号箭头处有"-"表示减法)

(3) 系统: (左输出右输入) 即左y右f.

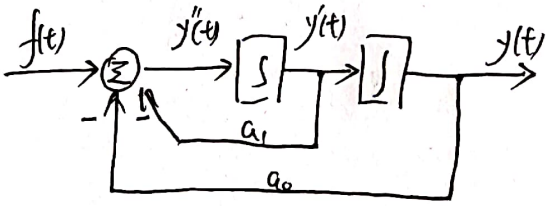
①一阶系统.



$$f(t)-a_0y(t)=y'(t)$$

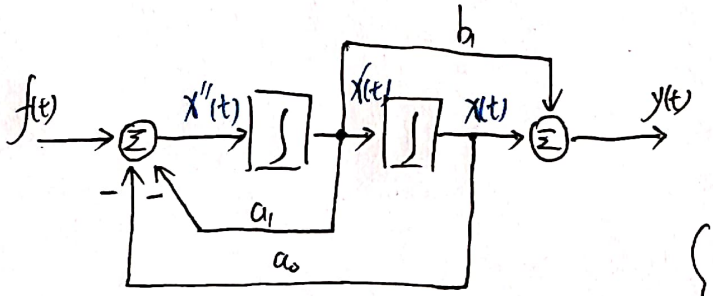
即 $y'(t)+a_0y(t)=f(t)$

②二阶系统:



$$f(t)-a_1y'(t)-a_0y(t)=y''(t)$$

即 $y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=f(t)$



$$f(t)-a_0x(t)-a_1x'(t)=x''(t)$$

$$\begin{cases} x''(t)+a_1x'(t)+a_0x(t)=f(t) \\ y(t)=bx'(t)+x(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=bf'(t)+f(t)$$

步骤: ①设出中间变量. 标在框图. 对连续系统. 最右端积分器的输出为x(t); 离散系统. 最左端延迟单元的输入为x(k).

②对加法器列方程. 整理. f(t)在等号右边. y(t)在等号左边.

③消去中间变量. 可以得出结果

2. 离散系统的框图表示.

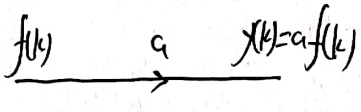
(1) 离散系统方程的一般形式.

后向差分方程. $\nabla y(k) = y(k) - y(k-1)$

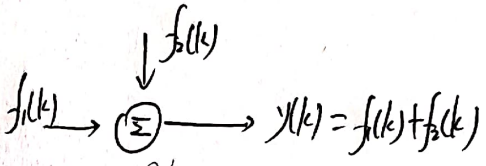
(2) 单元框图.



延迟器



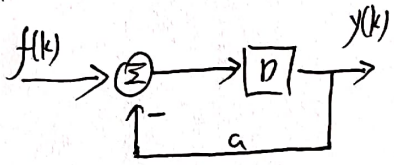
数乘器



加法器

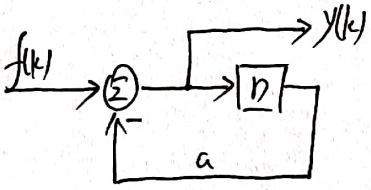
(3) 系统.

① 一阶系统



$f(k) - ay(k) = y(k+1)$

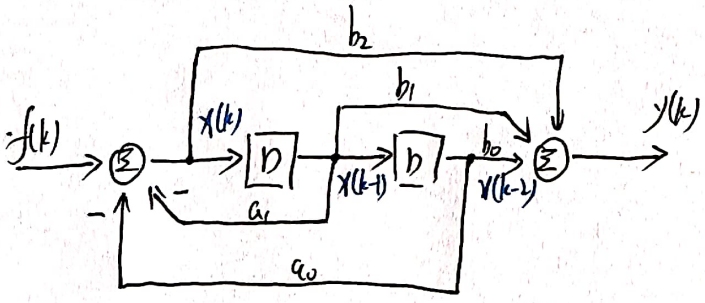
$y(k+1) + ay(k) = f(k)$ —— 前向差分方程.



$f(k) - ay(k-1) = y(k)$

$y(k) + ay(k-1) = f(k)$ —— 后向差分方程.

② 二阶系统.

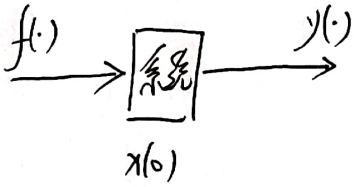


$f(k) - a_1 x(k-1) - a_0 x(k-2) = x(k)$

$$\begin{cases} x(k) + a_1 x(k-1) + a_0 x(k-2) = f(k) \\ y(k) = b_2 x(k) + b_1 x(k-1) + b_0 x(k-2) \end{cases}$$

$\Rightarrow y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 f(k) + b_1 f(k-1) + b_0 f(k-2)$

(六) 线性时不变系统的性质和判断.



$f(\cdot)$：输入
$y(\cdot)$：输出
$x(0)$：系统的初始状态.

1. 线性系统与非线性系统.

(1) 可分解性：$y(\cdot) = y_{zi}(\cdot) + y_{zs}(\cdot)$

(2) 齐次性（含零输入响应齐次性和零状态响应齐次性）即

$$\{a x(0)\} \longrightarrow a y_{zi}(\cdot)$$

$$a f(\cdot) \longrightarrow a y_{zs}(\cdot)$$

(3) 叠加性（含零输入响应叠加性和零状态响应叠加性）. 即

$$\{x_1(0) + x_2(0)\} \longrightarrow [y_{zi1}(\cdot) + y_{zi2}(\cdot)]$$

$$[f_1(t) + f_2(t)] \longrightarrow [y_{zs1}(\cdot) + y_{zs2}(\cdot)].$$

满足上述三个性质，则称为线性系统. 三个条件缺一不可，否则就是非线性系统.

2. 时不变系统与时变系统.

若系统满足输入延迟多少时间，其零状态响应也延迟多少时间. 即

$$f(t-t_0) \longrightarrow y_{zs}(t-t_0) \quad \text{——连续系统}$$

$$f(k-k_0) \longrightarrow y_{zs}(k-k_0) \quad \text{——离散系统}$$

则称该系统具有时不变特性. 具有时不变特性的系统称为时不变系统，否则称为时变系统.

3. 因果系统与非因果系统.

因果系统是指当且仅当输入信号激励系统时，才会出现零状态输出的系统。具体地说，因果系统的输出不会出现在输入之前. 即因果系统满足下列因果性：

连续系统：若 $t<t_0$ 时，$f(t)=0$，则当 $t<t_0$ 时，$y_{zs}(t)=0$.

离散系统：若 $k<k_0$ 时，$f(k)=0$，则当 $k<k_0$ 时，$y_{zs}(k)=0$.

不满足因果性的系统称为非因果系统.

4. 稳定系统与非稳定系统.

如果系统的输入有界，输出也有界. 即若 $|f(\cdot)|<\infty$，$|y_{zs}(\cdot)|<\infty$，则该系统称为有界输入有界输出稳定系统，否则称为不稳定系统.

注意：

(1) 若系统满足线性性质，又满足时不变特性，则称该系统为线性时不变系统. 即LTI系统.

LTI系统满足微分性和积分性. 即若 $f(t)\to y_{zs}(t)$，则

$$\frac{df(t)}{dt}\to\frac{dy_{zs}(t)}{dt}\quad;\quad\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\to\int_{-\infty}^{t}y_{zs}(\tau)d\tau.$$

(2) 下列因素导致微分(差分)方程所描述的系统是非线性的或时变的：

① 若方程中任何一项是常数或是 $y(\cdot)$ 或 $f(\cdot)$ 的非线性函数，则它是非线性的.

② 若 $y(\cdot)$ 或 $f(\cdot)$ 中任意一项的系数是 t 或 k 的显函数，或对 $y(\cdot)$ 或 $f(\cdot)$ 中的任意一项进行尺度变换或反转运算，则它是时变的.

(3) 对系统的时不变性、因果性、稳定性的判别只需针对零状态响应.

例1-6. 试判别下列零状态响应是否为线性系统，是否为时不变系统.

(1) $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = f(t)$ 线性系统. 时不变系统.

(2) $\frac{dy(t)}{dt} + 2ty(t) = t^2 \cdot f(t)$ 线性系统. 时变系统.

(3) $\frac{dy(t)}{dt} + y^2(t) = f(t)$ 非线性系统. 时不变系统

(4) $\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = f(t+10)$ 线性系统. 时不变系统.

(5) $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = f(2t)$ 线性系统. 时变系统.

(6) $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = f(-t)$. 线性系统. 时变系统

(7) $\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) + 3 = 2f(t)$ 非线性系统. 时不变系统.

例1-7. 设激励为 $f(\cdot)$，下列是各系统的零状态响应. 判断各系统是否是线性的，时不变的，因果的. 稳定的?

(1) $y_{zs}(t) = |f(t)|$ (2) $y_{zs}(t) = f(t)\cos(2\pi t)$ (3) $y_{zs}(k) = (k-2)f(k)$

解: (1) $f(t) = af_1(t) + bf_2(t)$ $y(t) = |af_1(t) + bf_2(t)| \neq ay_1(t) + by_2(t)$ 非线性的.

$y(t-t_0) = |f(t-t_0)|$ 时不变的;

当 $t < t_0$, $f(t) = 0$ 时, $t < t_0$, $y_{zs}(t) = 0$, 因果的.

若 $f(t)$ 有界. 则 $y_{zs}(t)$ 有界. 稳定的

(2) $f(t) = af_1(t) + bf_2(t)$ $y(t) = [af_1(t) + bf_2(t)]\cos 2\pi t = af_1(t)\cos 2\pi t + bf_2(t)\cos 2\pi t = ay_1(t) + by_2(t)$

线性的;

当 $f(t) = f(t-t_0)$ 时. $y(t) = f(t-t_0)\cos(2\pi t) \neq y(t-t_0) = f(t-t_0)\cos[2\pi(t-t_0)]$ 时变的;

$t < t_0$ 时. $f(t) = 0$ 则 $t < t_0$, $y(t) = 0$. 因果的.

若 $f(t)$ 有界. $y_{zs}(t)$ 有界. 稳定的.

(3) $f(k)=af_1(k)+bf_2(k)$ $y(k)=(k-2)[af_1(k)+bf_2(k)]=a(k-2)f_1(k)+b(k-2)f_2(k)=ay_1(k)+by_2(k)$

线性的.

$f(k)=f(k-k_0)$ 时. $y(k)=(k-2)f(k-k_0)\neq y(k-k_0)=(k-k_0-2)f(k-k_0)$ 时变的.

$k<k_0$ 时. $f(k)=0$, 则 当 $k<k_0$ 时. $y(k)=0$ 因果的.

当 $f(k)=\varepsilon(k)$ 有界. $y_{zs}(k)=(k-2)\varepsilon(k)$ 无界. 不稳定的.

例1-8. 某LTI连续系统, 其初始状态一定, 已知当激励为 $f(t)$ 时, 其全响应 $y_1(t)=6e^{-2t}-5e^{-3t}$, $t\geq 0$; 当系统的初始状态不变, 激励为 $3f(t)$ 时, 其全响应 $y_2(t)=8e^{-2t}-7e^{-3t}$, $t\geq 0$.

求激励为 $2f(t)$ 时, 系统的零状态响应 $y'_{zs}(t)$.

解: 设激励为 $f(t)$ 时. 零状态响应为 $y_{zs}(t)$.

由已知条件: $y_1(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=6e^{-2t}-5e^{-3t}$

$y_2(t)=y_{zi}(t)+3y_{zs}(t)=8e^{-2t}-7e^{-3t}$.

解得 $y_{zs}(t)=e^{-2t}-e^{-3t}$, $t\geq 0$

$y_{zi}(t)=5e^{-2t}-4e^{-3t}$, $t\geq 0$

当激励为 $2f(t)$ 时. $y'_{zs}(t)=2y_{zs}(t)=2e^{-2t}-2e^{-3t}$. $t\geq 0$.

课后作业: 1.5, 1.6, 1.7, 1.9, 1.10 除(1)之外, 1.20, 1.23, 1.24,

1.25, 1.27, 1.28, 1.31, 1.32,

二. 连续系统的时域分析

1. 复习内容：

线性时不变系统微分方程及其求解；连续系统全响应的分解：零输入响应和零状态响应；全响应的固有分量与强迫分量、稳态分量与暂态分量的概念；系统的冲激响应和阶跃响应；卷积积分计算及其主要性质。

2. 具体要求：

★ (1) 微分方程及其求解，连续系统响应的固有分量与强迫分量、稳态分量与暂态分量的概念。

(2) 连续系统的零输入响应和零状态响应概念及求解 ★★

(3) 冲激响应和阶跃响应概念及求解 ★★

(4) 利用卷积积分时域求解任意激励下线性时不变系统的零状态响应 ★★★

(一) LTI连续系统的响应

1. 微分方程的经典解

全解 = 通解 + 特解

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

① 先确定通解形式

齐次微分方程 ⇒ 特征方程 ⇒ 特征根 ⇒ 确定通解的形式

<1> 不等单实根 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ $\longrightarrow$ $y_h(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}$

<2> 有 r 重实根 λ_1 $\longrightarrow$ $y_h(t)=\sum_{i=1}^{r} C_i t^{r-i} e^{\lambda_1 t} + \sum_{j=r+1}^{n} C_j e^{\lambda_j t}$

二重实根 $y_h(t)=(C_1 t + C_0)e^{\lambda t}$

<3> 有一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha \pm j\beta$

$$y_h(t)=e^{\alpha t}[C\cdot\cos(\beta t)+D\cdot\sin(\beta t)]=A\cdot e^{\alpha t}\cdot\cos(\beta t \mp \theta), \quad Ae^{j\theta}=C+jD$$

② 确定特解

首先由非齐次微分方程右端项确定特解的形式，将特解代入微分方程，确定特解中的待定系数。

<1> $f(t)=t^m$

$y_p(t)=P_m t^m + P_{m-1}t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0$ 所有特征根均不等于0

$y_p(t)=t^r[P_m t^m + P_{m-1}t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0]$ 有 r 重等于0的特征根

<2> $f(t)=e^{\alpha t}$

$y_p(t)=Pe^{\alpha t}$ α 不等于特征根

$y_p(t)=(P_1 t + P_0)e^{\alpha t}$ α 等于特征单根

$y_p(t)=(P_r t^r + P_{r-1}t^{r-1} + \cdots + P_1 t + P_0)e^{\alpha t}$ α 等于 r 重特征根

<3> $f(t)=\cos(\beta t)$ 或 $\sin(\beta t)$ $y_p(t)=P\cos(\beta t)+Q\sin(\beta t)=A\cos(\beta t-\theta)$ 所有特征根均不等于 $\pm j\beta$

③ 确定通解的待定系数 $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$

⇓

由初始值确定通解中的待定系数

例2-1. $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$, $t\geq 0$. 求 $f(t)=2e^{-t}$, $y(0)=2$, $y'(0)=-1$ 时的全解.

解: 特征方程: $\lambda^2+5\lambda+6=0$ 解得 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-3$. 所以 $y_h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$

由 $f(t)=2e^{-t}$ 设 $y_p(t)=P\cdot e^{-t}$. 代入微分方程.

$$P\cdot e^{-t}-5Pe^{-t}+6Pe^{-t}=2e^{-t}$$ 解得 $P=1$. 则 $y_p(t)=e^{-t}$.

则 $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}+e^{-t}$ 且 $y(0)=2$, $y'(0)=-1$

即 $\begin{cases} C_1+C_2+1=2 \\ -2C_1-3C_2-1=-1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1=3 \\ C_2=-2 \end{cases}$. 则 $y(t)=\underbrace{3e^{-2t}-2e^{-3t}}_{\text{自由响应}(\text{固有响应})}+\underbrace{e^{-t}}_{\text{强迫响应}}$, $t\geq 0$.

注: ① 齐次解的函数形式仅仅依赖于系统本身的特性, 而与激励 $f(t)$ 的函数形式无关, 称为系统的自由响应或固有响应.

② 特解的形式由激励信号确定, 称为强迫响应.

③ 瞬态响应与稳态响应 见课本 P42 例2.1-2.

2. 初始值的确定：已知 $y^{(k)}(0_-)$ $[k=0,1,\cdots,n-1]$ 求 $y^{(k)}(0_+)$ $[k=0,1,\cdots,n-1]$

例 2-2. $y''(t)+2y'(t)+y(t)=f''(t)+2f(t)$. 已知 $y(0_-)=1$，$y'(0_-)=-1$，$f(t)=\delta(t)$. 求 $y(0_+)$. $y'(0_+)$

解：将 $f(t)=\delta(t)$ 代入微分方程得 $y''(t)+2y'(t)+y(t)=\delta''(t)+2\delta(t)$.

令 $y''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_0(t)$.

则 $y'(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+r_1(t)$　　$y(t)=a\delta(t)+b_2(t)$

其中 $r_0(t)$. $r_1(t)$. $r_2(t)$ 均不含 $\delta(t)$ 及其各阶导数. 将其代入微分方程.

$$a\delta''(t)+(b+2a)\delta'(t)+(c+2b+a)\delta(t)+r_0(t)+2r_1(t)+r_2(t)=\delta''(t)+2\delta(t)$$

则 $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ a+2b+c=2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=5 \end{cases}$.

则 $y''(t)=\delta''(t)-2\delta'(t)+5\delta(t)+r_0(t)$.　　$y'(0_+)-y'(0_-)=\int_{0_-}^{0_+}y''(t)dt=5$. 则 $y'(0_+)=5+y'(0_-)=4$

$y'(t)=\delta'(t)-2\delta(t)+r_1(t)$.　　$y(0_+)-y(0_-)=\int_{0_-}^{0_+}y'(t)dt=-2$　则 $y(0_+)=-2+y(0_-)=-1$.

由上可知：当微分方程等号右端含有冲激函数及其各阶导数时，响应 $y(t)$ 及其各阶导数由 0_- 到 0_+ 的瞬间将发生跃变. 由 0_- 求 0_+ 值的步骤：

① 将 $f(t)$ 代入微分方程. 如等号右端含有 $\delta(t)$ 及其各阶导数，根据微分方程等号两端各奇异函数的系数相等的原理，判断方程左端 $y(t)$ 所含最高阶导数所含 $\delta(t)$ 导数的最高阶次.

② 令 $y''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_0(t)$. 对 $y''(t)$ 进行积分，求得 $y'(t)$ 和 $y(t)$.

③ 将 $y''(t)$. $y'(t)$. $y(t)$ 代入微分方程，根据方程等号两端各奇异函数的系数相等，从而求得 $y''(t)$ 中的各待定系数.

④ 分别对 $y'(t)$ 和 $y''(t)$ 等号两端从 0_- 到 0_+ 进行积分，依次求得各 0_+ 值 $y(0_+)$ 和 $y'(0_+)$.

3. 零输入响应 $y_{zi}(t)$.

$y_{zi}^{(n)}(t) + a_{n-1}y_{zi}^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y_{zi}'(t) + a_0 y_{zi}(t) = 0$ ，求通解.

4. 零状态响应 $y_{zs}(t)$.

$y_{zs}^{(n)}(t) + a_{n-1}y_{zs}^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y_{zs}'(t) + a_0 y_{zs}(t) = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1}f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 f'(t) + b_0 f(t)$

通解 + 特解； $y_{zs}^{(k)}(0_-) = 0$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$.

5. $y_{zi}(t)$ 和 $y_{zs}(t)$ 的初始值确定.

(1) 若已知 $y^{(k)}(0_-)$ $\quad y^{(k)}(t) = y_{zi}^{(k)}(t) + y_{zs}^{(k)}(t)$ $\quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$

$y^{(k)}(0_-) = y_{zi}^{(k)}(0_-) + y_{zs}^{(k)}(0_-)$ $\quad$ 且 $y_{zs}^{(k)}(0_-) = 0$

$y_{zi}^{(k)}(0_+) = y_{zi}^{(k)}(0_-) = y^{(k)}(0_-)$ ； $y_{zs}^{(k)}(0_+)$ 按例 2-2 的方法确定.

例 2-3. $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$ ；已知 $y(0_-) = 2$，$y'(0_-) = 1$，$f(t) = \varepsilon(t)$，求该系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$，零状态响应 $y_{zs}(t)$，和全响应 $y(t)$.

解：零输入响应 $y_{zi}(t)$ 满足 $y_{zi}''(t) + 3y_{zi}'(t) + 2y_{zi}(t) = 0$

$$\begin{cases} y_{zi}(0_+) = y_{zi}(0_-) = y(0_-) = 2 \\ y_{zi}'(0_+) = y_{zi}'(0_{\text{跳}}) = y'(0_-) = 1 \end{cases}$$

特征方程 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ 解得 $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$. 则 $y_{zi}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$.

则 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -C_1 - 2C_2 = 1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = -3 \end{cases}$ 则 $y_{zi}(t) = 5e^{-t} - 3e^{-2t}$，$t \geq 0$.

$f(t) = \varepsilon(t)$ 则零状态响应 $y_{zs}(t)$ 满足 $y_{zs}''(t) + 3y_{zs}'(t) + 2y_{zs}(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$ $\quad y_{zs}'(0_-) = y_{zs}(0_-) = 0$

令 $y_{zs}''(t) = a\delta(t) + r_1(t)$，则 $y_{zs}'(t) = r_1(t)$ $\quad y_{zs}(t) = r_2(t)$ 代入微分方程. 解得 $a = 2$.

$y_{zs}'(0_+) - y_{zs}'(0_-) = \int_{0_-}^{0_+} y_{zs}''(t)\,dt = 2$ $\quad y_{zs}'(0_+) = 2 + y_{zs}'(0_-) = 2$.

$y_{zs}(0_+) - y_{zs}(0_-) = \int_{0_-}^{0_+} y_{zs}'(t)\,dt = 0$ $\quad y_{zs}(0_+) = 0$

当 $t>0$ 时 $y_{zs}''(t)+3y_{zs}'(t)+2y_{zs}(t)=6$ 则 $y_{zsh}(t)=C_3e^{-2t}+C_4e^{-t}$

设 $y_{zsp}(t)=P$ 代入上式 解得 $P=3$ 则 $y_{zsp}(t)=3$ $y_{zs}(t)=C_3e^{-2t}+C_4e^{-t}+3$

则 $\begin{cases} C_3+C_4+3=0 \\ -2C_3-C_4=2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_3=1 \\ C_4=-4 \end{cases}$ 则 $y_{zs}(t)=-4e^{-t}+e^{-2t}+3,\ t\geq 0$

全响应 $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=5e^{-t}-3e^{-2t}+(-4e^{-t}+e^{-2t}+3)=\underbrace{e^{-t}-2e^{-2t}}_{\text{固有响应}}+\underline{3}_{\text{强迫响应}},\ t\geq 0$

(2) 若已知 $y^{(k)}(0_+)$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

例2-4. $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$，若已知 $y(0_+)=3$，~~[illegible]~~ $y'(0_+)=1$，$f(t)=\varepsilon(t)$.

求该系统的零输入响应和零状态响应.

解 ① 求 $y_{zs}(t)$. 设 $y_{zs1}(t)$ 是 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$，$f(t)=\varepsilon(t)$ 的零状态响应.

则 $t>0$ 时 $\begin{cases} y_{zs1}''(t)+3y_{zs1}'(t)+2y_{zs1}(t)=1 \\ y_{zs1}(0_+)=y_{zs1}(0_-)=0 \\ y_{zs1}'(0_+)=y_{zs1}'(0_-)=0 \end{cases}$

$y_{zi}^{(k)}(0_+)=y_{zi}^{(k)}(0_-)=y^{(k)}(0_-)$

$y_{zs}^{(k)}(0_+)$ 与 $y^{(k)}(0_-)$ 和 $y^{(k)}(0_+)$ 无关.

$y_{zi}^{(k)}(0_+)=y^{(k)}(0_+)-y_{zs}^{(k)}(0_+)$.

$y_{zs1h}(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-t}$. 设 $y_{zs1p}(t)=P$ 代入上式 解得 $P=\frac{1}{2}$ 则 $y_{zs1p}(t)=\frac{1}{2}$.

则 $y_{zs1}(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-t}+\frac{1}{2},\ t\geq 0$

由初始值 $\begin{cases} y_{zs1}(0_+)=C_1+C_2+\frac{1}{2}=0 \\ y_{zs1}'(0_+)=-2C_1-C_2=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1=\frac{1}{2} \\ C_2=-1 \end{cases}$

所以 $y_{zs1}(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-t}+\frac{1}{2}\right)\varepsilon(t)$. 思考：为什么乘 $\varepsilon(t)$.

由微分特性和线性特性可知

$$y_{zs}(t)=2y_{zs1}'(t)+6y_{zs1}(t)=2\left[(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)+\left(\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-t}+\frac{1}{2}\right)\Big|_{t=0}\cdot\delta(t)\right]+6\left(\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-t}+\frac{1}{2}\right)\varepsilon(t)$$

$$=(-4e^{-t}+e^{-2t}+3)\varepsilon(t).$$

② 求 $y_{zi}(t)$

$$\begin{cases} y_{zi}''(t)+3y_{zi}'(t)+2y_{zi}(t)=0 \\ y_{zi}(0_+)=y(0_+)-y_{zs}(0_+)=3-0=3 \\ y_{zi}'(0_+)=y'(0_+)-y_{zs}'(0_+)=1-2=-1 \end{cases}$$

$y_{zi}(t)=C_3e^{-2t}+C_4e^{-t}$

$$\begin{cases} y_{zi}(0_+)=C_3+C_4=3 \\ y_{zi}'(0_+)=-2C_3-C_4=-1 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} C_3=-2 \\ C_4=5 \end{cases}$$

所以 $y_{zi}(t)=(5e^{-t}-2e^{-2t})\varepsilon(t)=5e^{-t}-2e^{-2t}$, $t\geq 0$

(二) 冲激响应和阶跃响应 —— 要求零状态响应

1. 冲激响应：一个LTI系统，当其初始状态为零时，输入为单位冲激函数 $\delta(t)$ 所引起的响应称为单位冲激响应，用 $h(t)$ 表示。

若n阶微分方程的等号右端只含 $f(t)$，即 $y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0y(t)=f(t)$

则 $f(t)=\delta(t)$ 时

$$\begin{cases} h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0h(t)=\delta(t) \\ h^{(j)}(0_-)=0, \quad j=0,1,\cdots,n-1 \end{cases}$$

$t>0$ 时

$$\begin{cases} h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0h(t)=0 \\ h^{(j)}(0_+)=0, \quad j=0,1,\cdots,n-2 \\ h^{(n-1)}(0_+)=1 \end{cases}$$

则 $h(t)=\left(\sum_{j=1}^{n}C_je^{\lambda_jt}\right)\varepsilon(t)$

若 $y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0y(t)=b_mf^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_0f(t)$ 求其冲激响应 $h(t)$

① $\begin{cases} h_0^{(n)}(t)+a_{n-1}h_0^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0h_0(t)=\delta(t) \\ h_0^{(j)}(0_-)=0, \quad j=0,1,2,\cdots,n-1 \end{cases}$ 用上述方法求得 $h_0(t)$

② 由微分特性和线性特性得

$h(t)=b_mh_0^{(m)}(t)+b_{m-1}h_0^{(m-1)}(t)+\cdots+b_0h_0(t)$

例2-5. $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$. 求 $h(t)$.

解: $t>0$ 时 $\begin{cases} h''(t)+5h'(t)+6h(t)=0 \\ h'(0_+)=1,\ h(0_+)=0 \end{cases}$

特征方程 $\lambda^2+5\lambda+6=0$ 解得 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-3$. 则 $h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$

$\begin{cases} h(0_+)=C_1+C_2=0 \\ h'(0_+)=-2C_1-3C_2=1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-1 \end{cases}$ 则 $h(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})\varepsilon(t)$.

例2-6. $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f''(t)+2f'(t)+3f(t)$, 求 $h(t)$.

解: 由例2-5由得. $h_0''(t)+5h_0'(t)+6h_0(t)=f(t)$. $f(t)=\delta(t)$ 则 $h_0(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})\varepsilon(t)$

由微分特性和线性特性得 $h(t)=h_0''(t)+2h_0'(t)+3h_0(t)=\delta(t)+(3e^{-2t}-6e^{-3t})\varepsilon(t)$.

其中 $h_0'(t)=(-2e^{-2t}+3e^{-3t})\varepsilon(t)+(e^{-2t}-e^{-3t})|_{t=0}\cdot\delta(t)=(-2e^{-2t}+3e^{-3t})\varepsilon(t)$

$h_0''(t)=(4e^{-2t}-9e^{-3t})\varepsilon(t)+(-2e^{-2t}+3e^{-3t})|_{t=0}\cdot\delta(t)=\delta(t)+(4e^{-2t}-9e^{-3t})\varepsilon(t)$

解法二: $h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)+3\delta(t)$

令 $h''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_2(t)$ 则 $h'(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+r_1(t)$, $h(t)=a\delta(t)+r_2(t)$.

代入微分方程 $a\delta''(t)+(b+5a)\delta'(t)+(c+5b+6a)\delta(t)+r_2(t)+5r_1(t)+6r_2(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)+3\delta(t)$

则 $\begin{cases} a=1 \\ b+5a=2 \\ c+5b+6a=3 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=12 \end{cases}$ 则 $\begin{cases} r_2(t)=\delta'(t)-3\delta(t)+12\delta(t)+r_0(t) \\ r_1(t)=\delta'(t)-3\delta(t)+r_1(t) \end{cases}$

$h'(0_+)-h'(0_-)=\int_{0_-}^{0_+}h''(t)dt=12$. $h'(0_+)=12$; $h(0_+)-h(0_-)=\int_{0_-}^{0_+}h'(t)dt=-3$, $h(0_+)=-3$.

$t>0$ 时. $h''(t)+5h'(t)+6h(t)=0$ 通解 $h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$. 则 $\begin{cases} C_1+C_2=-3 \\ -2C_1-3C_2=12 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1=3 \\ C_2=-6 \end{cases}$

且 $h(t)=\delta(t)+r_2(t)$. [即 $h(t)$ 含 $\delta(t)$]

则 $h(t)=\delta(t)+(3e^{-2t}-6e^{-3t})\varepsilon(t)$.

2. 阶跃响应. 一个LTI系统，当其初始状态为零时，输入为单位阶跃函数所引起的响应称为单位阶跃响应. 简称阶跃响应，用$g(t)$表示.

若n阶微分方程等号右端只含$f(t)$. 则 $\begin{cases} g^{(n)}(t)+a_{n-1}g^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0g(t)=\varepsilon(t) \\ g^{(j)}(0_-)=0, \quad j=0,1,\cdots,n-1 \end{cases}$

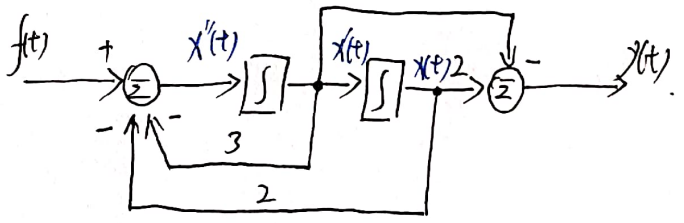
$t>0$时 $\begin{cases} g^{(n)}(t)+a_{n-1}g^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0g(t)=1 \\ g^{(j)}(0_+)=g^{(j)}(0_-)=0, \quad j=0,1,2,\cdots,n-1 \end{cases}$

则 $g(t)=\left(\sum_{j=1}^{n}C_je^{\lambda_jt}+\frac{1}{a_0}\right)\varepsilon(t)$. 其中$\frac{1}{a_0}$为特解. C_j由0_+值确定.

若等号右端含有$f(t)$及其各阶导数，可利用微分特性和线性性质求解.

因为 $\delta(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$. 则 $g(t)=\int_{0_-}^{t}h(t)\,dt$, $h(t)=\frac{dg(t)}{dt}$.

例2-7. 如图所示. 求其阶跃响应$g(t)$及冲激响应$h(t)$.



解: $f(t)-3x'(t)-2x(t)=x''(t)$ 即 $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=f(t)$.

$y(t)=2x(t)-x'(t)$

则微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=-f'(t)+2f(t)$.

设$g_0(t)$满足 $g_0''(t)+3g_0'(t)+2g_0(t)=f(t)$. $f(t)=\varepsilon(t)$.

$t>0$时 $\begin{cases} g_0''(t)+3g_0'(t)+2g_0(t)=1 \\ g_0(0_+)=g_0'(0_+)=0 \end{cases}$

有 $\lambda^2+3\lambda+2=0$ 解得 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$.

$g_0(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+\frac{1}{2}$

且 $\begin{cases} g_0(0_+)=C_1+C_2+\frac{1}{2}=0 \\ g_0'(0_+)=-C_1-2C_2=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1=-1 \\ C_2=\frac{1}{2} \end{cases}$

所以 $g_0(t)=\left(-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\right)\varepsilon(t)$

由微分特性和线性性质得 $g(t)=-g'(t)+2g_0(t)=(-3e^{-t}+2e^{-2t}+1)\varepsilon(t)$

冲激响应 $h(t)=g'(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t})\varepsilon(t)$

(三)卷积积分

1. 卷积积分

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\cdot f(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$



$y(t)$ 称为 $f(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分，简称卷积。

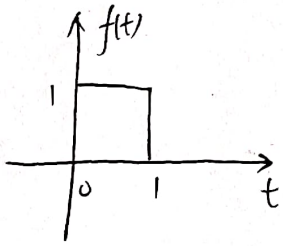
$$y(t)=f(t)*h(t)\xrightarrow{f(t)=0,\ t<0}\int_0^{+\infty}f(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

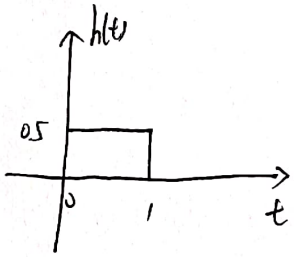
$$\xrightarrow{h(t)=0,\ t<0}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

$$\xrightarrow[h(t)=0,\ t<0]{f(t)=0,\ t<0}\int_0^{t}f(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

2. 卷积的图解法

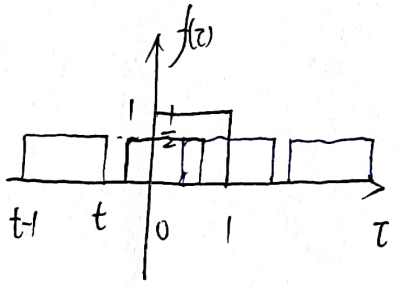
例2-9.





求 $y(t)=f(t)*h(t)$

注：$h(t)\to h(\tau)\to h(t-\tau)$ 先反转后平移



$t<0$ 时，$f(\tau)\cdot h(t-\tau)=0$，$y(t)=0$

$0\le t<1$ 时，$y(t)=\int_0^t 1\times 0.5\,d\tau=\frac{1}{2}t$

$1\le t<2$ 时，$y(t)=\int_{t-1}^{1}1\times 0.5\,d\tau=\frac{1}{2}(2-t)=1-\frac{1}{2}t$

$t\ge 2$ 时，$y(t)=0$

$$y(t)=\frac{1}{2}t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+(1-\frac{1}{2}t)[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]=\frac{1}{2}t\,\varepsilon(t)+(1-t)\varepsilon(t-1)-(1-\frac{1}{2}t)\varepsilon(t-2)$$

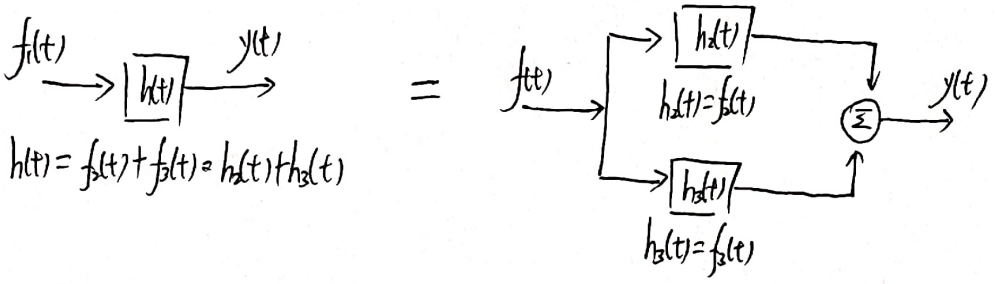
$$=\begin{cases}\frac{1}{2}t, & 0\le t<1\\ 1-\frac{1}{2}t, & 1\le t<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(四) 卷积积分的性质.

1. 代数性质

(1) $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$ 交换律.

(2) 分配律 $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$



(3) 结合律: $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$

2. 与冲激函数进行卷积. 任何函数与冲激函数卷积都是它本身.

(1) $f(t) * \delta(t) = f(t)$ $\quad \delta(t) * \delta(t) = \delta(t)$

(2) $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$ $\quad \delta(t) * \delta(t - t_0) = \delta(t - t_0)$

(3) $f(t - t_1) * \delta(t - t_2) = f(t - t_1 - t_2)$ $\quad \delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$

3. 卷积的微分与积分.

$$f^{(1)}(t) \triangleq \frac{df(t)}{dt} \qquad f^{(-1)}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau$$

若 $f(t) = f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

则 $f^{(1)}(t) = f_1^{(1)}(t) * f_2(t) = f_2^{(1)}(t) * f_1(t)$

$f^{(-1)}(t) = f_1^{(-1)}(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2^{(-1)}(t)$

$f(t) = f_1^{(-1)}(t) * f_2^{(1)}(t) = f_1^{(1)}(t) * f_2^{(-1)}(t)$

推广: $f^{(i)}(t) = f_1^{(j)}(t) * f_2^{(i-j)}(t)$ 正数: 微分

负数: 积分.

4. 卷积积分的时移性　　若 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

(1) $f_1(t-t_1)*f_2(t)=f_1(t)*f_2(t-t_1)=f(t-t_1)$

(2) $f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=f_1(t-t_2)*f_2(t-t_1)=f(t-t_1-t_2)$

5. 性质的综合应用

(1) $f(t)*\delta'(t)=f'(t)*\delta(t)=f'(t)$

(2) $f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)*\delta(t)=f^{(n)}(t)$

(3) $f(t)*\varepsilon(t)=f^{(-1)}(t)*\delta(t)=f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$

(4) $\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=\int_0^t 1\,d\tau=t\varepsilon(t)$

(5) $t\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=\int_0^t \tau\,d\tau=\frac{1}{2}t^2\varepsilon(t)$

例2-10. $f_1(t)=3e^{-2t}\varepsilon(t)$，$f_2(t)=2\varepsilon(t)$，$f_3(t)=2\delta(t-2)$，求卷积积分

(1) $f_1(t)*f_2(t)$　　(2) $f(t)*f_3(t)$

解：(1) $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t 3e^{-2\tau}\times 2\,d\tau=6\int_0^t e^{-2\tau}d\tau=-3e^{-2\tau}\Big|_0^t=3(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$

(2) $f_1(t)*f_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}3e^{-2\tau}\varepsilon(\tau)\cdot 2\varepsilon(t-\tau-2)d\tau$

$f_1(t)<0$，$t<0$. 则积分下限为 0；对于 $\varepsilon(t-\tau-2)$ 当 $t-\tau-2<0$，$\tau>t-2$ 时为零. 则积分上限为 $t-2$.

$$f_1(t)*f_3(t)=\int_0^{t-2}3e^{-2\tau}\times 2\,d\tau=-3e^{-2\tau}\Big|_0^{t-2}=3\left[1-e^{-2(t-2)}\right]\varepsilon(t-2)$$

例2-11. 求 (1) $\varepsilon(t+3)*\varepsilon(t-5)$　　(2) $e^{-2t}\varepsilon(t+3)*\varepsilon(t-5)$

解 (1) $\varepsilon(t+3)*\varepsilon(t-5)=\int_{-3}^{t-5}1\,d\tau=(t-2)\varepsilon(t-2)$

或　$\varepsilon(t+3)*\varepsilon(t-5)=(t-2)\varepsilon(t-2)$

(2). $e^{-2t}\varepsilon(t+3) * \varepsilon(t-5) = e^{6}\cdot e^{-2(t+3)}\varepsilon(t+3) * \varepsilon(t-5)$ ~~$= e^{6}\int_{-3}^{t-5} e^{-2(t+3)}\,d\tau$~~

$= e^{6}\cdot e^{-2t}\varepsilon(t) * \varepsilon(t-2)$

$= e^{6}\cdot \int_{0}^{t-2} e^{-2\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}e^{6}\cdot[1-e^{-2(t-2)}]\cdot\varepsilon(t-2)$

例2-12. $f_1(t) = t\varepsilon(t-1)$ $f_2(t) = \varepsilon(t+3)$

则 $f(t) = f_1(t) * f_2(t) = [(t-1)+1]\varepsilon(t-1) * \varepsilon(t+3)] = (t-1)\varepsilon(t-1) * \varepsilon(t+3) + \varepsilon(t-1) * \varepsilon(t+3)$

$= \frac{1}{2}(t+2)^2\varepsilon(t+2) + (t+2)\varepsilon(t+2) = (\frac{1}{2}t^2+3t+4)\varepsilon(t+2)$

课后题: 2.1 (1)、(2)、(3) ; 2.2 (3)、(4) ; 2.4 ; 2.7 ; 2.14 ; 2.16 ; 2.17 ; 2.18 ; 2.19 (1) (4) ; 2.20 ; 2.24 ; 2.26 ; 2.27 ; 2.28 ; 2.29 ; 2.30 .

三. 离散系统的时域分析.

1. 复习内容.

离散系统的差分方程及其求解。离散系统全响应的分解：零输入响应和零状态响应，全响应的固有分量与强迫分量、稳态分量与暂态分量的概念，系统的阶跃响应与单位序列响应。卷积和计算及其主要性质.

2. 具体要求

★ (1) 差分方程及其求解，离散系统响应的固有分量与强迫分量、稳态分量与暂态分量的概念.

(2) 离散系统的零输入响应和零状态响应概念及求解. ★★

(3) 阶跃响应和单位序列响应概念及求解. ★★

(4) 利用卷积和时域求解任意激励下线性时不变离散系统的零状态响应 ★★★

(一) LTI离散系统的响应.

1. 差分方程 (后向)

$$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_1y(k-n+1)+a_0y(k-n)=b_mf(k)+b_{m-1}f(k-1)+\cdots+b_1f(k-m+1)+b_0f(k-m)$$

2. 差分方程的求解.

(1) 迭代法 (递推法)

例: $y(k)+a_0y(k-1)=f(k)$. $y(0)$ 已知. 求 $y(k)$

则 $y(k)=-a_0y(k-1)+f(k)$. $k=1$, $y(1)=-a_0y(0)+f(1)$

$k=2$, $y(2)=-a_0y(1)+f(2)$

....

(2) 经典法求解. $y(k)=y_h(k)+y_p(k)$

① 齐解: $y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=0$

特征方程: $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$.

由特征根的形式确定齐次解的形式.

<1> 单实根. $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$. $y_h(k)=\sum_{i=1}^{n}C_i(\lambda_i)^k$.

<2> r重实根. $y_h(k)=(C_{r-1}k^{r-1}+C_{r-2}k^{r-2}+\cdots+C_1k+C_0)\cdot\lambda^k$.

二重实根. $y_h(k)=(C_1k+C_0)\lambda^k$.

<3> 一对共轭复根. $\lambda_{1,2}=a\pm jb=\rho e^{\pm j\beta}$.

$y_h(k)=\rho^k[C\cdot\cos(\beta k)+D\cdot\sin(\beta k)]=A\cdot\rho^k\cdot\cos(\beta k-\theta)$ 其中 $A\angle\theta=C+jD$.

② 特解.

$f(k)=k^m$

$y_p(k)=P_mk^m+P_{m-1}k^{m-1}+\cdots+P_1k+P_0$. 所有特征根均不等于1

$y_p(k)=k^r[P_mk^m+P_{m-1}k^{m-1}+\cdots+P_1k+P_0]$ 当有r重等于1的特征根时.

$f(k)=a^k$ $\begin{cases} y_p(k)=P\cdot a^k & a\text{ 不等于特征根} \\ y_p(k)=(P_1k+P_0)a^k & a\text{ 是特征单根} \\ y_p(k)=(P_rk^r+P_{r-1}k^{r-1}+\cdots+P_1k+P_0)a^k & a\text{ 是 }r\text{ 重特征根} \end{cases}$

$f(k)=\cos(\beta k)$
$f(k)=\sin(\beta k)$ $\Big\{ y_p(k)=P\cos(\beta k)+Q\sin\beta k$ 所有特征根均不等于 $e^{\pm j\beta}$

③全解 $y(k)=y_h(k)+y_p(k)$

即：① 差分方程 → 特征方程 → 特征根 → 齐次解形式.

② $f(k)$ → 确定特解形式 → 方程 → 确定特解的待定系数.

③ 全解 $y(k)=y_h(k)+y_p(k)$，由初始值确定待定系数.

例3-1. $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)$. $f(k)=2^k, k\geq 0$. $y(0)=0$. $y(1)=2$. 求 $y(k)$

解: $\lambda^2+3\lambda+2=0$ 解得 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$. 则 $y_h(k)=C_1\cdot(-1)^k+C_2\cdot(-2)^k$.

由 $f(k)=2^k$ 设 $y_p(k)=P\cdot 2^k$. 代入差分方程.

$P\cdot 2^k+3P\cdot 2^{(k-1)}+2P\cdot 2^{(k-2)}=2^k$ 即 $(P+\frac{3P}{2}+\frac{2P}{4})\cdot 2^k=2^k$. 解得 $P=\frac{1}{3}$

则 $y_p(k)=\frac{1}{3}\cdot 2^k$ 所以 $y(k)=C_1\cdot(-1)^k+C_2\cdot(-2)^k+\frac{1}{3}\cdot 2^k$

$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2+\frac{1}{3}=0 \\ y(1)=-C_1-2C_2+\frac{2}{3}=2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1=\frac{2}{3} \\ C_2=-1 \end{cases}$

则 $y(k)=\left[\underbrace{\frac{2}{3}(-1)^k-(-2)^k}_{\text{自由响应}\ \text{固有响应}}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot 2^k}_{\text{强迫响应}}\right]\varepsilon(k)$.

~~若已知 $y(1), y(2), \cdots, y(n)$~~

若已知 $y(-1), y(-2), \cdots, y(-n)$ $\xrightarrow{\text{递推法}}$ $y(0), y(1), y(2), \cdots y(n-1)$

3. 零输入响应 $y_{zi}(k)$：系统的激励为零，仅由系统的初始状态引起的响应。

$y_{zi}(k)+a_{n-1}y_{zi}(k-1)+\cdots+a_1y_{zi}(k-n+1)+a_0y_{zi}(k-n)=0$　　只有齐次解。

$y_{zi}(-1)=y(-1)$，$y_{zi}(-2)=y(-2)$，$\cdots$ $y_{zi}(-n)=y(-n)$。

$y_{zi}(k)$ $(k=-1,-2,\cdots,-n)$ $\xrightarrow{\text{递推法}}$ $y_{zi}(k)$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$。

4. 零状态响应 $y_{zs}(k)$：系统的初始状态为零，仅由激励 $f(k)$ 所产生的响应。

$y_{zs}(k)+a_{n-1}y_{zs}(k-1)+\cdots+a_1y_{zs}(k-n+1)+a_0y_{zs}(k-n)=b_mf(k)+b_{m-1}f(k-1)+\cdots+b_0f(k-m)$　　齐次解+特解。

$y_{zs}(k)=0$ $(k=-1,-2,\cdots,-n)$ $\xrightarrow{\text{递推法}}$ $y_{zs}(k)$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$。

例3-2. $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)$，$f(k)=2^k$，$k\geq 0$，且 $y(-1)=0$，$y(-2)=\frac{1}{2}$，求该系统的零输入响应，零状态响应及全响应。

解：零输入响应 $y_{zi}(k)$ 满足 $\begin{cases} y_{zi}(k)+3y_{zi}(k-1)+2y_{zi}(k-2)=0 \\ y_{zi}(-1)=y(-1)=0\ ;\ y_{zi}(-2)=y(-2)=\frac{1}{2} \end{cases}$

$y_{zi}(k)=-3y_{zi}(k-1)-2y_{zi}(k-2)$ 则 $\begin{cases} y_{zi}(0)=-3y_{zi}(-1)-2y_{zi}(-2)=-1 \\ y_{zi}(1)=-3y_{zi}(0)-2y_{zi}(-1)=3 \end{cases}$

特征方程 $\lambda^2+3\lambda+2=0$ 解得 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$。则 $y_{zi}(k)=C_1(-1)^k+C_2(-2)^k$，$k\geq 0$。

$\begin{cases} y_{zi}(0)=C_1+C_2=-1 \\ y_{zi}(1)=-C_1-2C_2=3 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-2 \end{cases}$ 所以 $y_{zi}(k)=[(-1)^k-2(-2)^k]\varepsilon(k)$。

零状态响应 $y_{zs}(k)$ 满足 $\begin{cases} y_{zs}(k)+3y_{zs}(k-1)+2y_{zs}(k-2)=f(k) \\ y_{zs}(-1)=y_{zs}(-2)=0 \end{cases}$

$y_{zs}(k)=-3y_{zs}(k-1)-2y_{zs}(k-2)+f(k)$ $\begin{cases} y_{zs}(0)=-3y_{zs}(-1)-2y_{zs}(-2)+f(0)=1 \\ y_{zs}(1)=-3y_{zs}(0)-2y_{zs}(-1)+f(1)=-1 \end{cases}$

由上可知 $y_{zi}(k)=C_3(-1)^k+C_4(-2)^k$.

由 $f(k)=2^k$ 设 $y_{zsp}(k)=P\cdot 2^k$ 代入差分方程 解得 $P=\frac{1}{3}$. $y_{zsp}(k)=\frac{1}{3}\cdot 2^k$.

则 $y_{zs}(k)=C_3(-1)^k+C_4(-2)^k+\frac{1}{3}\cdot 2^k$. $k\geq 0$

$$\begin{cases} y_{zs}(0)=C_3+C_4+\frac{1}{3}=1 \\ y_{zs}(1)=-C_3-2C_4+\frac{2}{3}=-1 \end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases} C_3=-\frac{1}{3} \\ C_4=1 \end{cases}$$ 所以 $y_{zs}(k)=\left[-\frac{1}{3}(-1)^k+(-2)^k+\frac{1}{3}\cdot 2^k\right]\varepsilon(k)$.

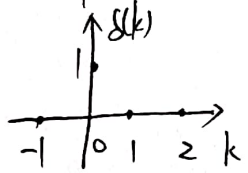
全响应 $y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=\left[(-1)^k-2(-2)^k\right]\varepsilon(k)+\left[-\frac{1}{3}(-1)^k+(-2)^k+\frac{1}{3}\cdot 2^k\right]\varepsilon(k)$

$$=\left[\underbrace{\frac{2}{3}(-1)^k-(-2)^k}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot 2^k}_{\text{强迫响应}}\right]\varepsilon(t).$$

二. 单位序列和单位序列响应

1. 单位序列和单位阶跃序列

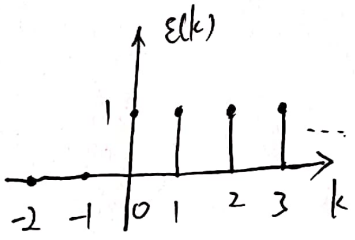
(1) 单位序列 $\delta(k)$



$$\delta(k)=\begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases} \qquad \delta(k-j)=\begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k\neq j \end{cases}$$

$$f(k)\delta(k-j)=f(j)\cdot\delta(k-j)$$

(2) 单位阶跃序列 $\varepsilon(k)$



$$\varepsilon(k)=\begin{cases} 1, & k\geq 0 \\ 0, & k<0 \end{cases} \qquad \varepsilon(k-j)=\begin{cases} 1, & k\geq j \\ 0, & k<j \end{cases}$$

(3) $\delta(k)$ 与 $\varepsilon(k)$ 的关系

$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

$$\varepsilon(k)=\sum_{j=0}^{+\infty}\delta(k-j).$$

2. 单位序列响应 $h(k)$

当LTI离散系统的激励为单位序列 $\delta(k)$ 时，系统的零状态响应称为单位序列响应，用 $h(k)$ 表示。

差分方程为 $y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=f(k)$，$f(k)=\delta(k)$ 且 $y(-1)=y(-2)=\cdots=y(-n)=0$

由递推法确定 $h(0)$，$h(1)$，$\cdots$，$h(n-1)$

$k>0$ 时 $\begin{cases} h(k)+a_{n-1}h(k-1)+\cdots+a_0h(k-n)=0 \\ h(0),\ h(1),\ h(2),\ \cdots,\ h(n-1) \end{cases}$

列写特征方程，根据特征根确定通解形式，代入求出待定系数。

若右端项 $=b_mf(k)+b_{m-1}f(k-1)+\cdots+b_0f(k-m)$

① 先求出右端项 $=f(k)$ 时对应的单位序列响应 $h_0(k)$

② 由线性性质和时不变特性 $h(k)=b_mh_0(k)+b_{m-1}h_0(k-1)+\cdots+b_0h_0(k-m)$

例3-3. $y(k)-\frac{5}{6}y(k-1)+\frac{1}{6}y(k-2)=f(k)$，求其单位序列响应 $h(k)$

解. $\begin{cases} h(k)-\frac{5}{6}h(k-1)+\frac{1}{6}h(k-2)=\delta(k) \\ h(-1)=h(-2)=0 \end{cases}$

$h(k)=\frac{5}{6}h(k-1)-\frac{1}{6}h(k-2)+\delta(k)$ $\quad\begin{cases} h(0)=\frac{5}{6}h(-1)-\frac{1}{6}h(-2)+\delta(0)=1 \\ h(1)=\frac{5}{6}h(0)-\frac{1}{6}h(-1)+\delta(1)=\frac{5}{6} \end{cases}$

$k>0$ 时 $\begin{cases} h(k)-\frac{5}{6}h(k-1)+\frac{1}{6}h(k-2)=0 \\ h(0)=1,\ h(1)=\frac{5}{6} \end{cases}$ 特征方程 $\lambda^2-\frac{5}{6}\lambda+\frac{1}{6}=0$

解得 $\lambda_1=\frac{1}{2}$，$\lambda_2=\frac{1}{3}$

所以 $h(k)=C_1\cdot(\frac{1}{2})^k+C_2\cdot(\frac{1}{3})^k$，$k\geq0$

$\begin{cases} h(0)=C_1+C_2=1 \\ h(1)=\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{3}C_2=\frac{5}{6} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1=3 \\ C_2=-2 \end{cases}$ 则 $h(k)=[3\cdot(\frac{1}{2})^k-2(\frac{1}{3})^k]\varepsilon(k)$

例3-4. $y(k)-\frac{5}{6}y(k-1)+\frac{1}{6}y(k-2)=f(k)-f(k-2)$，求 $h(k)$

解：设 $h_0(k)$ 为 $y(k)-\frac{5}{6}y(k-1)+\frac{1}{6}y(k-2)=f(k)$ 的单位序列响应。则 $h_0(k)=[3(\frac{1}{2})^k-2(\frac{1}{3})^k]\varepsilon(k)$

由线性性质和时不变特性得

$$h(k)=h_0(k)-h_0(k-2)=[3\cdot(\frac{1}{2})^k-2(\frac{1}{3})^k]\varepsilon(k)-[3(\frac{1}{2})^{k-2}-2(\frac{1}{3})^{k-2}]\varepsilon(k-2)$$

3. 阶跃响应

当LTI离散系统的激励为单位阶跃序列 $\varepsilon(k)$ 时，零状态响应称为阶跃响应。用 $g(k)$ 表示。

已知差分方程，可以利用经典法求 $g(k)$。

此外 $\quad \varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)=\sum_{j=0}^{+\infty}\delta(k-j)$

则 $\quad g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)=\sum_{j=0}^{+\infty}h(k-j)$

$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$ 则 $h(k)=g(k)-g(k-1)$。

注：等比数列求和公式 $=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

三. 卷积和

1. 定义 $y_{zs}(k)=f(k)*h(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}f(i)\cdot h(k-i)$

$\underline{f(k)=0,k<0}$ $\sum_{i=0}^{+\infty}f(i)\cdot h(k-i)$

$\underline{h(k)=0,k<0}$ $\sum_{i=-\infty}^{k}f(i)\,h(k-i)$

$\underline{\underline{f(k)=0,k<0}}_{h(k)=0,k<0}$ $\sum_{i=0}^{k}f(i)\cdot h(k-i)$

例3-5. $f_1(k)=(0.5)^k\varepsilon(k)$. $f_2(k)=1$. $f_3(k)=\varepsilon(k)$. $-\infty<k<+\infty$ 求.

(1) $f_1(k)*f_2(k)$ (2) $f_1(k)*f_3(k)$

解: (1) $f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=0}^{+\infty}(0.5)^i=\frac{1}{1-0.5}=2$ $-\infty<k<+\infty$

(2) $f_1(k)*f_3(k)=\sum_{i=0}^{k}(0.5)^i=\frac{1-(0.5)^{k+1}}{1-0.5}=2[1-(0.5)^{k+1}]\varepsilon(k)$

2. 卷积和的性质

(1) 运算性质

① 交换律 $f_1(k)*f_2(k)=f_2(k)*f_1(k)$

② 结合律 $f_1(k)*f_2(k)*f_3(k)=f_1(k)*[f_2(k)*f_3(k)]$

③ 分配律 $f_1(k)*[f_2(k)+f_3(k)]=f_1(k)*f_2(k)+f_1(k)*f_3(k)$

(2) 单位序列的卷积和

若 $f_1(k)*f_2(k)=f_2(k)*f_1(k)=f(k)$

则 $f_1(k)*f_2(k\pm m)=f_1(k\pm m)*f_2(k)=f(k\pm m)$

$f_1(k\pm m_1)*f_2(k\pm m_2)=f_1(k\pm m_2)*f_2(k\pm m_1)=f(k\pm m_1\pm m_2)$

(3) 离散 $f(k)$ 与 $\delta(k)$ 的卷积和就是 $f(k)$ 本身.

$f(k)*\delta(k)=f(k)$ $\quad\quad$ $\delta(k)*\delta(k)=\delta(k)$

$f(k)*\delta(k-k_0)=f(k-k_0)$ $\quad\quad$ $\delta(k)*\delta(k-k_0)=\delta(k-k_0)$

$f(k-k_1)*\delta(k-k_2)=f(k-k_1-k_2)$

(4) $\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=(k+1)\varepsilon(k)$; $k\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=\frac{1}{2}(k+1)k\varepsilon(k)$; $k\varepsilon(k)*k\varepsilon(k)=\frac{1}{6}(k+1)k(k-1)\varepsilon(k)$.

例3-6. (1) $\varepsilon(k)*[\delta(k)+\delta(k-2)]=\varepsilon(k)*\delta(k)+\varepsilon(k)*\delta(k-2)=\varepsilon(k)+\varepsilon(k-2)$

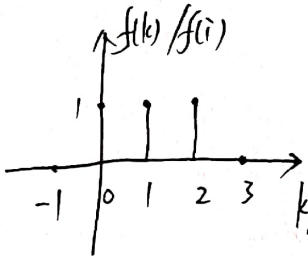
(2) $\varepsilon(k)*[\varepsilon(k-2)+\varepsilon(k-4)]=\varepsilon(k)*\varepsilon(k-2)+\varepsilon(k)*\varepsilon(k-4)=(k-1)\varepsilon(k-2)+(k-3)\varepsilon(k-4)$

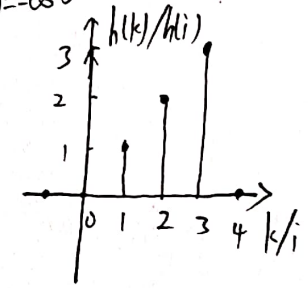
3. 卷积和计算

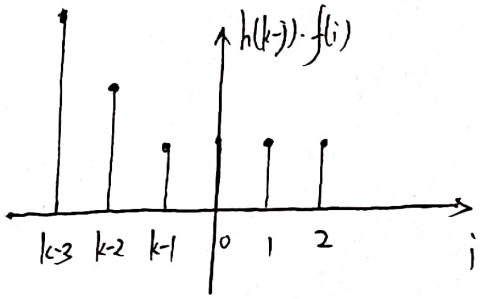
(1) 图解法

例: $f(k)=\begin{cases}1, & k=0,1,2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $h(k)=\begin{cases}k, & k=1,2,3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$. 求 $y(k)=f(k)*h(k)$.

解: $y(k)=f(k)*h(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}f(i)\cdot h(k-i)$







$k=0$. $y(k)=0$

$k=1$. $y(k)=1\times1=1$

$k=2$. $y(k)=2\times1+1\times1=3$

$k=3$. $y(k)=3\times1+2\times1+1\times1=6$

$k=4$. $y(k)=3\times1+2\times1=5$

$k=5$. $y(k)=3\times1=3$

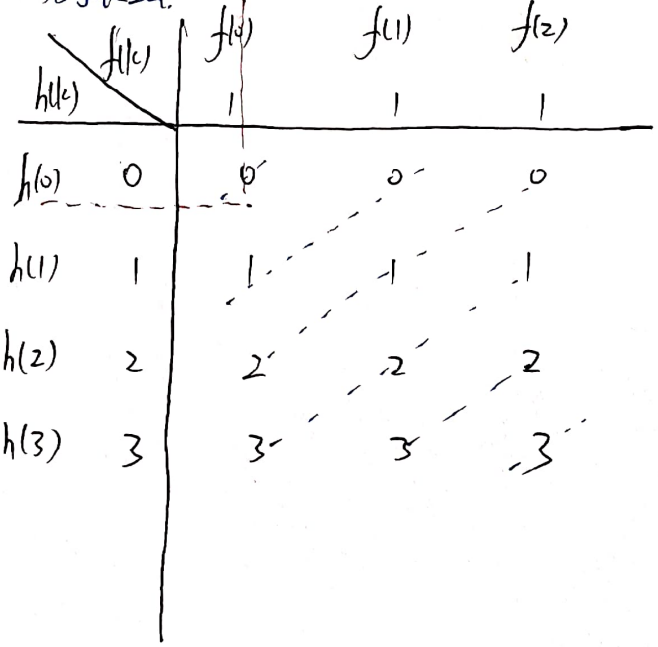
$k=6$. $y(k)=0$.

则 $y(k)=\{0,1,3,6,5,3,0\}$

↑

$k=0$

(2)列表法

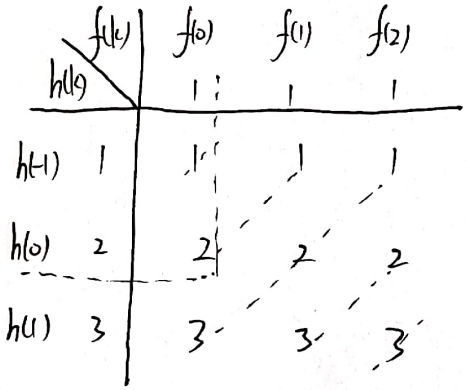


$f(k)=\{1,\ 1,\ 1\}$
$\uparrow_{k=0}$

$h(k)=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$
$\uparrow_{k=0}$

$y(k)=f(k)*h(k)=\{0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 5,\ 3\}$
$\uparrow_{k=0}$

若 $f(k)=\{1,\ 1,\ 1\}$ $h(k)=\{1,\ 2,\ 3\}$
$\uparrow_{k=0}$ $\uparrow$



$y(k)=f(k)*h(k)=\{1,\ 3,\ 6,\ 5,\ 3\}$
$\uparrow_{k=0}$

课后题：3.2(1) ； 3.6(1)(4) ； 3.8(1) ； 3.11 ； 3.12 ；

3.17 ； 3.21 ； 3.22.

1. 正弦信号的三要素，相量和相量图表示

（1）正弦信号的三要素　$\underset{\text{小写}}{u(t)}=\underset{\text{大写}}{U_m}\cos(\omega t+\varphi)$

①U_m：最大值，振幅；②ω：角频率，rad/s；③φ：初相角。rad 或°，$|\varphi|\le\pi$

（2）相位差：任意两个同频正弦量的相位角之差

$u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi_u)$　　$i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$　　相位差 $\theta=\varphi_u-\varphi_i$

$\theta=\varphi_u-\varphi_i>0$，电压 u 超前于电流 i，其相位差为 θ；　u 超前于 i 一个 θ 角

$\theta=\varphi_u-\varphi_i<0$，电压 u 落后于电流 i 一个 θ 角；

$\theta=\varphi_u-\varphi_i=0$，电压 u 与电流 i 同相；

$\theta=\varphi_u-\varphi_i=\pm\frac{\pi}{2}$，电压 u 与电流 i 正交；

$\theta=\varphi_u-\varphi_i=\pm\pi$，电压 u 与电流 i 反相；

（3）有效值：正弦量的有效值 $I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$，则 $i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi)$

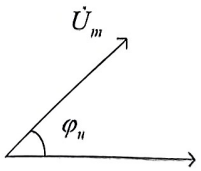
注：通常所说的正弦交流电压、电流的大小都是指有效值。如民用交流电压 220V，工业用电电压 380V。*（晋程 811+821 考研指导群：680630306）*交流测量仪表所指示的读数，电气设备的额定值等都是指有效值。但各种器件和电气设备的耐压值按最大值考虑。

（4）相量　$u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi)$

$\dot{I}_m=I_m\angle\varphi$　　振幅相量

$\dot{I}=I\angle\varphi$　　有效值相量

$\dot{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{I}_m$

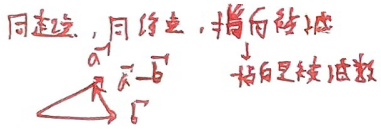


相量图

晋程西电811+821考研指导群：680630306

2023西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：680

Quark 夸克 高清扫描 还原文档



补充：复数运算

①复数的两种表示：I.极坐标：$\dot{I} = I\angle\varphi$

II.直角坐标：$\dot{I} = I_x + jI_y$

②复数的运算：I.加减：$\dot{I}_1 = I_{1x} + jI_{1y}$　　$\dot{I}_2 = I_{2x} + jI_{2y}$

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (I_{1x} + I_{2x}) + j(I_{1y} + I_{2y})$$

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = (I_{1x} - I_{2x}) + j(I_{1y} - I_{2y})$$

II.乘除：$\dot{I}_1 = I_1\angle\varphi_1$　　$\dot{I}_2 = I_2\angle\varphi_2$

$$\dot{I}_1 \cdot \dot{I}_2 = I_1 I_2\angle\varphi_1 + \varphi_2 \qquad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{I_1}{I_2}\angle\varphi_1 - \varphi_2$$

③两种坐标形式下的相互转化

$$\dot{I} = I_x + jI_y = I\angle\varphi$$

极→直：$\begin{cases} I_x = I\cos\varphi \\ I_y = I\sin\varphi \end{cases}$　　直→极：$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\dfrac{I_y}{I_x} & \text{第I象限} \\ \pi - \arctan\left|\dfrac{I_y}{I_x}\right| & \text{第II象限} \\ -\pi + \arctan\left|\dfrac{I_y}{I_x}\right| & \text{第III象限} \\ -\arctan\left|\dfrac{I_y}{I_x}\right| & \text{第IV象限} \end{cases}$$

④注意：I.唯一性：正弦量与相量一一对应

II.线性特性 a.齐次性　　$i(t) \to \dot{I}$　　$\alpha i(t) \to \alpha\dot{I}$

b.可加性　　$i_1(t) \to \dot{I}_1$　　$i_2(t) \to \dot{I}_2$

$$i_1(t) + i_2(t) \to \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

III.微分特性　$i(t) \to \dot{I}$　　$\dfrac{di(t)}{dt} \to j\omega\dot{I}$

西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：680630306

西电811+821考研指导群：680630306

Quark 夸克 高清扫描 还原文档

例 4.1-1 已知电压或电流的瞬时表达式为

（a）$u(t)=3\cos(314t+45^\circ)V$　（b）$i(t)=-8\cos(6280t-120^\circ)mA$

（c）$u(t)=-15\sin(10000t+90^\circ)V$

指出：（a）的振幅为__3__ V，频率为__50__ Hz，初相角为__45°__。

（b）的有效值为__$4\sqrt{2}$__ mA，角频率为__6280__ rad/s，初相角为__60°__。

（c）的振幅为__15__ V，角频率为__10000__ rad/s，初相角为__90°__。

解：（a）由表达式可知，振幅为$3V$，频率为$50Hz$，初相角为45°

（b）$i(t)=-8\cos(6280t-120^\circ)=8\cos(6280t-120^\circ+180^\circ)=8\cos(6280t+60^\circ)mA$

有效值 $I=\dfrac{I_m}{\sqrt{2}}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}mA$

（c）$u(t)=-15\sin(10000t+90^\circ)=15\cos(10000t+90^\circ+90^\circ)=15\cos(10000t+180^\circ)V$

例 4.1-2 正弦电流在$t=2ms$时为零，最大值为10A，角频率为$200\pi rad/s$，则电流的瞬时表达式$i(t)=$__$10\cos(200\pi t+\frac{\pi}{10})A$__。

解：$i(t)=10\cos(200\pi t+\varphi)A$　且 $i(2\times10^{-3})=10\cos(200\pi\times2\times10^{-3}+\varphi)=0$

其中$|\varphi|\le\pi$　则 $0.4\pi+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$　$\varphi=\dfrac{\pi}{10}$

则 $i(t)=10\cos\left(200\pi t+\dfrac{\pi}{10}\right)A$

例 4.1-3 试写出下列各电流的瞬时表达式（角频率为ω）

（a）$\dot{I}_{m1}=-50e^{-j60^\circ}A$　则 $\dot{I}_{m1}=50e^{j120^\circ}A$　$i_1(t)=50\cos(\omega t+120^\circ)A$

（b）$\dot{I}_2=-25+j60\,A$　则 $\dot{I}_2=65\angle112.6^\circ A$　$i_2(t)=65\sqrt{2}\cos(\omega t+112.6^\circ)A$

（c）$\dot{I}_3=j16A$　则 $\dot{I}_3=16\angle90^\circ A$　$i_3(t)=16\sqrt{2}\cos(\omega t+90^\circ)A$

练习：　课后题　4-1　4-2　4-3　　习题册　P_{154}二　P_{155}三

需要西电811+821考研指导请加微信：68063030306

2023西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：68

Quark 夸克 高清扫描 还原文档

2. 基尔霍夫定理的相量形式，元件伏安关系的相量形式

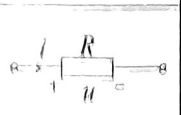
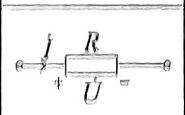
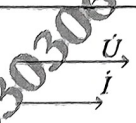
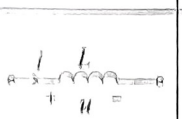
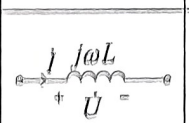
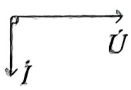
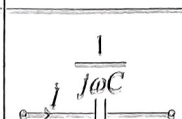
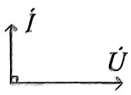
（1）基尔霍夫定律

KCL：$\sum \dot{I}=0$　　$\sum \dot{I}_m=0$

KVL：$\sum \dot{U}=0$　　$\sum \dot{U}_m=0$

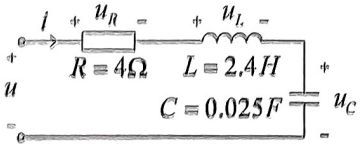
只有相量（有效值相量、最大值相量）才满足 KCL、KVL，有效值和最大值不满足。

（2）基本元件伏安关系的相量形式

基本元件	相量模型	伏安关系		相量图
		$\dot{U}=R\dot{I}$	$U=RI$ $\varphi_u=\varphi_i$	
		$\dot{U}=j\omega L\dot{I}$ 感抗：$X_L=\omega L$	$U=\omega LI$ $\varphi_u=\varphi_i+90^\circ$	
		$\dot{U}=\frac{1}{j\omega C}\dot{I}$ 容抗：$X_C=\frac{1}{\omega C}$	$U=\frac{1}{\omega C}I$ $\varphi_u=\varphi_i-90^\circ$	

分析正弦稳态电路时，各元件用相量模型表示，各激励源用相量表示，就可以得到原电路图的相量模型。根据 KCL、KVL 以及元件的伏安关系就可以列出电路方程，并用代数的方法求得所需的电流、电压。

例 4.2-1 如图所示的电路，已知 $i=2\sqrt{2}\cos 5t\ A$，求电压 u



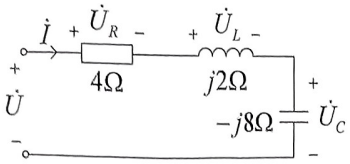
解：由题知　$\dot{I}=2\angle 0^\circ A$　且 $\omega=5rad/s$

则 $j\omega L=j5\times 2.4=j12\Omega$　　$\frac{1}{j\omega C}=-j\frac{1}{5\times 0.025}=-j8\Omega$　　$R=4\Omega$

则电路的相量模型为

电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：680630306

Quark 夸克 高清扫描 还原文档



$$\dot{U}_R = R\cdot\dot{I} = 4\times 2\angle 0^\circ = 8\angle 0^\circ V$$

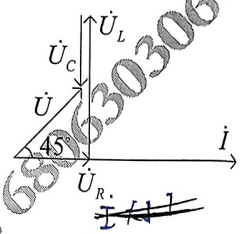
$$\dot{U}_L = j\omega L\cdot\dot{I} = j12\times 2\angle 0^\circ = 24\angle 90^\circ V$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\cdot\dot{I} = -j8\times 2\angle 0^\circ = 16\angle -90^\circ V$$

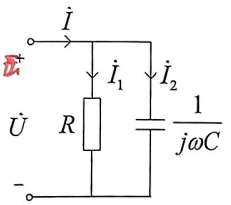
由 KVL 得

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = 8\angle 0^\circ + 24\angle 90^\circ + 16\angle -90^\circ = 8 + j24 - j16 = 8 + j8 = 8\sqrt{2}\angle 45^\circ V$$

则 $u = 16\cos\left(5t + 45^\circ\right)V$　　相量图为



例 4.2-2 如图所示电路，已知 $I_1 = 4A$，$I_2 = 3A$，求总电流 I



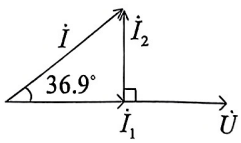
解：再分析计算正弦稳态电路的各种问题时，注意：各电流、电压均为相量，本题已知 $\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$ 的有效值，而初相角未知。



并联电路，设 $\dot{U} = U\angle 0^\circ V$　　则 $\dot{I}_1 = 4\angle 0^\circ A$　$\dot{I}_2 = 3\angle 90^\circ A$

由 KCL 得　$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 4\angle 0^\circ + 3\angle 90^\circ = 4 + j3 = 5\angle 36.9^\circ A$　则 $I = 5A$

$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 5A$　　相量图



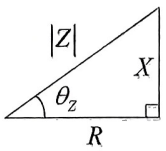
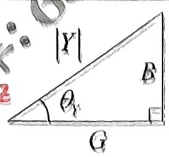
练习：　课后题　4-4　4-5　4-6　4-7　4-8　4-9

西电811+821考研指导群：680630306

2023西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：680

Quark 夸克 高清扫描 还原文档

3. 阻抗和导纳

	阻抗（Z）	导纳（Y）
对象	不含独立源的二端口电路 N，端口电压、电流取关联参考方向。其相量模型如图所示 	
定义	$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\lvert Z\rvert\angle\theta_Z=R+jX$ 单位：Ω 阻抗 Z 是复数，不是相量 R：实部，电阻 X：虚部，电抗 $\lvert Z\rvert$：阻抗的模 θ_Z：阻抗角	$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=\lvert Y\rvert\angle\theta_Y=G+jB$ 单位：西门子（S） 导纳 Y 是复数 G：实部，电导 B：虚部，电纳 $\lvert Y\rvert$：导纳的模 θ_Y：导纳角
三角形	 $R=\lvert Z\rvert\cos\theta_Z$ $X=\lvert Z\rvert\sin\theta_Z$ $\lvert Z\rvert=\sqrt{R^2+X^2}=\frac{U}{I}$ $\theta_Z=\arctan\frac{X}{R}=\varphi_u-\varphi_i$	 $G=\lvert Y\rvert\cos\theta_Y$ $B=\lvert Y\rvert\sin\theta_Y$ $\lvert Y\rvert=\sqrt{G^2+B^2}=\frac{I}{U}$ $\theta_Y=\arctan\frac{B}{G}=\varphi_i-\varphi_u$
电阻	$Z_R=R$	$Y_R=G=\frac{1}{R}$
电感	$Z_L=jX_L=j\omega L$，X_L 称为感抗	$Y_L=-jB_L=-j\frac{1}{\omega L}$，$B_L$ 称为感纳
电容	$Z_C=-jX_C=-j\frac{1}{\omega C}$，$X_C$ 称为容抗	$Y_C=jB_C=j\omega C$，B_C 称为容纳
性质	$-\frac{\pi}{2}\le\theta_Z<0$，$X<0$，Z 呈容性 $\theta_Z=0$，$X=0$，Z 呈阻性 $0<\theta_Z\le\frac{\pi}{2}$，$X>0$，Z 呈感性	$-\frac{\pi}{2}\le\theta_Y<0$，$B<0$，Y 呈感性 $\theta_Y=0$，$B=0$，Y 呈阻性 $0<\theta_Y\le\frac{\pi}{2}$，$B>0$，Y 呈容性
等效	串联 $Z_{eq}=\sum_{k=1}^{n}Z_k$	并联 $Y_{eq}=\sum_{k=1}^{n}Y_k$

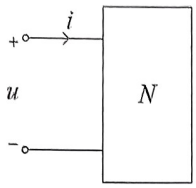
3西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI赋考研QQ群：680630306

西电811+821考研指导群：680630306

Quark 夸克 高清扫描 还原文档

关系	$Y=\frac{1}{Z}$；$\lvert Y\rvert=\frac{1}{\lvert Z\rvert}$；$\theta_y=-\theta_z$ $G=\frac{R}{R^2+X^2}$，$B=-\frac{X}{R^2+X^2}$，$R=\frac{G}{G^2+B^2}$，$X=-\frac{B}{G^2+B^2}$

例 4.3-1 如图所示电路，其端电压和电流分别有以下三种情况，N 是何种元件？并求其参数



（1）$u=10\cos(10t+50^\circ)V$　$i=2\sin(10t+140^\circ)A$

（2）$u=10\sin 100t\,V$　$i=2\cos 100t\,A$

（3）$u=-10\cos 10t\,V$　$i=-2\sin 10t\,A$

解：（1）$i=2\sin(10t+140^\circ)=2\cos(10t+140^\circ-90^\circ)=2\cos(10t+50^\circ)\,A$

$Z=\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}=\frac{10\angle 50^\circ}{2\angle 50^\circ}=5\Omega$　则 N 可能是5Ω的电阻元件

（2）$u=10\sin 100t=10\cos(100t-90^\circ)V$

$Z=\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}=\frac{10\angle -90^\circ}{2\angle 0^\circ}=5\angle -90^\circ=-j5=-j\frac{1}{\omega C}$　则 $C=\frac{1}{5\omega}=\frac{1}{5\times 100}=\frac{1}{500}F$

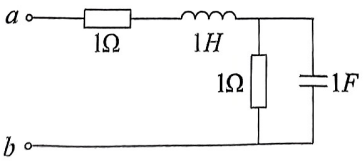
则 N 可能是 $C=\frac{1}{500}F$ 的电容元件

（3）$u=-10\cos 10t=10\cos(10t+180^\circ)V$　$i=-2\sin 10t=2\cos(10t+90^\circ)\,A$

$Z=\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}=\frac{10\angle 180^\circ}{2\angle 90^\circ}=5\angle 90^\circ=j5=j\omega L$　$L=\frac{5}{\omega}=\frac{5}{10}=0.5H$

则 N 可能是 $L=0.5H$ 的电感元件

例 4.3-2 求 ab 端的阻抗和导纳（$\omega=2rad/s$）

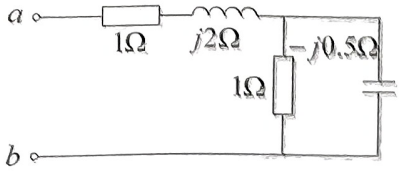


解：相量模型为

西电811+821考研指导群：680630306

2023西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：680

Quark 夸克 高清扫描 还原文档



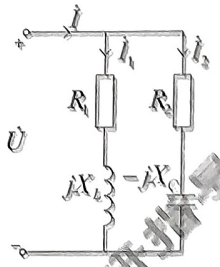
$$Z_{ab}=1+j2+1/\!/(-j0.5)=1+j2+\frac{-j0.5}{1-j0.5}$$

$$=1+j2+\frac{-j}{2-j}=1+j2+\frac{-j(2+j)}{5}$$

$$=\frac{6}{5}+j\frac{8}{5}=2\angle 53.1^\circ\,\Omega$$

$$Y_{ab}=\frac{1}{Z_{ab}}=0.5\angle -53.1^\circ S$$

例 4.3-3 如图所示电路，已知电流相量 $\dot{I}_1=20\angle -36.9^\circ A$，$\dot{I}_2=10\angle 45^\circ A$，电压相量 $\dot{U}=100\angle 0^\circ V$，求元件 R_1、X_L、R_2、X_C 和输入阻抗 Z。



解：$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=20\angle -36.9^\circ+10\angle 45^\circ A$

R_1 所在支路阻抗 $Z_1=R_1+jX_L=\frac{\dot{U}}{\dot{I}_1}=\frac{100\angle 0^\circ}{20\angle -36.9^\circ}=5\angle 36.9^\circ=4+j3\,\Omega$

则 $R_1=4\Omega$，$X_L=3\Omega$

R_2 所在支路阻抗 $Z_2=R_2-jX_C=\frac{\dot{U}}{\dot{I}_2}=\frac{100\angle 0^\circ}{10\angle 45^\circ}=10\angle -45^\circ=5\sqrt{2}-j5\sqrt{2}\,\Omega$

则 $R_2=5\sqrt{2}\Omega$，$X_C=5\sqrt{2}\Omega$

总阻抗 $Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{100\angle 0^\circ}{20\angle -36.9^\circ+10\angle 45^\circ}=4.23\angle 12.04^\circ\,\Omega$

练习：　课后题　4-10　4-11　4-12　4-13　4-14

普程西电811+821考研指导群：680630306

西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院A1院考QQ群：680630306

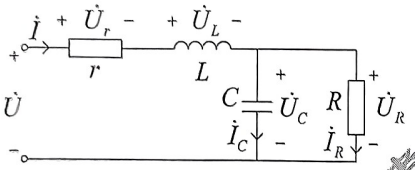
Quark 夸克 高清扫描 还原文档

4. 稳态电路计算方法

依据：$\begin{cases}\sum \dot{I}=0\\ \sum \dot{U}=0\\ \dot{U}=Z\cdot\dot{I}\end{cases}$

在分析正弦稳态电路时，若电流、电压用相量表示，R、L、C 元件用阻抗或导纳表示，即电路用相量模型表示，那么分析直流电路的网孔法、节点法、等效电源定理等都适用于分析电路的相量模型，差别仅在于所得电路方程以相量形式表示的代数方程以及相量形式描述的电路的电路定理，而计算则为复数运算。

例 4.4-1 如图所示电路，已知$r=10\Omega$，$L=20mH$，$C=10\mu F$，$R=50\Omega$，电源电压$U=100V$，其角频率$\omega=10^3 rad/s$。求电路的等效阻抗和各元件的电压、电流，并画出相量图。



解：$X_L=\omega L=20\times10^{-3}\times10^3=20\Omega$

$X_C=\dfrac{1}{\omega C}=\dfrac{1}{10\times10^{-6}\times10^3}=100\Omega$

等效阻抗

$$Z=r+jX_L+(-jX_C)//R=10+j20+\frac{-j100\times50}{50-j100}=10+j20+40-j20=50\Omega$$

设$\dot{U}=100\angle0^\circ V$，则$\dot{I}=\dfrac{\dot{U}}{Z}=\dfrac{100\angle0^\circ}{50}=2\angle0^\circ A$

$\dot{U}_r=r\dot{I}=10\times2\angle0^\circ=20\angle0^\circ V$　　$\dot{U}_L=jX_L\dot{I}=j20\times2\angle0^\circ=40\angle90^\circ V$

$\dot{U}_R=\dot{U}_C=\dot{U}-\dot{U}_r-\dot{U}_L=100\angle0^\circ-20\angle0^\circ-40\angle90^\circ=80-j40=89.4\angle-26.6^\circ V$

$\dot{I}_R=\dfrac{\dot{U}_R}{R}=\dfrac{89.4\angle-26.6^\circ}{50}=1.79\angle-26.6^\circ A$

雷神西电811+821考研指导群：680630402

023西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：68

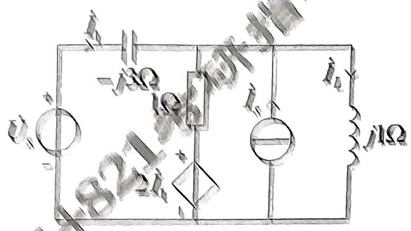
Quark 夸克 高清扫描 还原文档





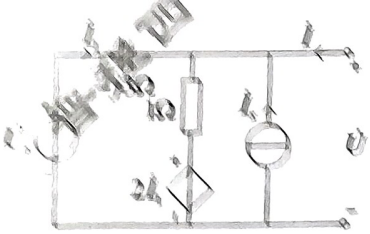
西电811-821考研专群：680630306

例 4.4-2 如图所示电路，已知$\dot{U}_s=1\angle 0°V$，$\dot{I}_s=1\angle 0°A$，求$\dot{I}_1$



解：方法一：戴维南定理，求端口伏安关系

将$j1\Omega$以外的电路进行戴维南等效，求端口伏安关系



$$\dot{U}=\dot{I}_1+\dot{I}+\dot{I}_s+2\dot{I}_1=3\dot{I}_1+\dot{I}+\dot{I}_s$$

$$\dot{U}_s=-j3\dot{I}_1+\dot{U}\quad\Rightarrow\quad \dot{I}_1=\frac{\dot{U}-\dot{U}_s}{j3}\text{代入上式}$$

$$\text{则}\quad (1+j)\dot{U}=\dot{I}+j\dot{U}_s+\dot{I}_s=\dot{I}+1+j$$

$$\text{则}\quad \dot{U}=1+\frac{1}{1+j}\dot{I}=1+\frac{1-j}{2}\dot{I}$$

则$\dot{U}_s=1\angle 0°V$　　$Z_0=\dfrac{1-j}{2}\Omega$　　则$\dot{I}_1=\dfrac{\dot{U}_s}{Z_0+j1}=\dfrac{1\angle 0}{\frac{1+j1}{2}}=1-j=\sqrt{2}\angle -45°A$

西电811-821考研专群、更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：680630306

Quark 夸克 高清扫描 还原文档

方法二：节点法

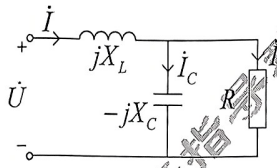
$$\left(\frac{1}{-j3}+1+\frac{1}{j1}\right)\dot{U}=\frac{\dot{U}_s}{-j3}+\frac{2\dot{I}_1}{1}+\dot{I}_s$$

$$\text{且}\quad \dot{I}_1=\frac{\dot{U}_s-\dot{U}}{-j3}$$

整理得 $\dot{U}=j\dot{U}_s+\dot{I}_s=1+j=\sqrt{2}\angle 45^\circ V$

$$\dot{I}_L=\frac{\dot{U}}{j1}=\frac{\sqrt{2}\angle 45^\circ}{j1}=\sqrt{2}\angle -45^\circ A$$

例 4.4-3 如图所示，已测得 $I_R=5A$，$I_C=5A$，电压 $U=70.7V$，并且 $\dot{U}$ 与 $\dot{I}_L$ 同相，求 R、X_L 和 X_C



解：已知电流和电压的有效值，而其相位未知，需假设某一电流或电压相位为零

设 $\dot{I}_R=5\angle 0^\circ A$ 则 $\dot{I}_C=5\angle 90^\circ A$ $\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_C=5\angle 0^\circ+5\angle 90^\circ=5\sqrt{2}\angle 45^\circ A$

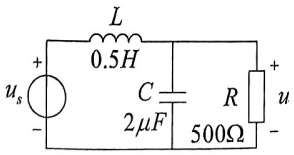
且 $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 同相，则 $\dot{U}=50\sqrt{2}\angle 45^\circ V$

由 KVL 得 $\dot{U}=jX_L\cdot\dot{I}+\dot{I}_R\cdot R=jX_L(5+j5)+5R=5(R-X_L)+j5X_L$

即 $50+j50=5(R-X_L)+j5X_L$ 则 $X_L=10\Omega$ $R=20\Omega$

且 $jX_C\cdot\dot{I}_C=R\dot{I}_R$ 即 $-jX_C\cdot\dot{I}_C=20\times 5\Rightarrow X_C=20\Omega$

例 4.4-4 如图所示电路，已知 $u_s(t)=15+10\sqrt{2}\cos\omega t+10\sqrt{2}\cos 2\omega t\,V$，式中 $\omega=10^3\,rad/s$，求输出电压 u



2023西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：68(

西电811+821考研指导群：680690306

Quark 夸克 高清扫描 还原文档

解：相量法用以分析单一频率的正弦稳态电路，电路中各处电压、电流都是同一频率的正弦量

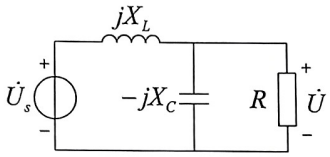
不同频，非功率，可以用叠加定理

叠加定理：$u_{s1}(t)=15V$

$$u_{s2}(t)=10\sqrt{2}\cos\omega t\,V$$

$$u_{s3}(t)=10\sqrt{2}\cos 2\omega t\,V$$

电路相量模型为：



（1）$u_{s1}(t)$单独作用时，直流情况下，电感可看作短路，电容可看成开路

$$u_1(t)=u_{s1}(t)=15V$$

（2）$u_{s2}(t)$单独作用时，$\dot{U}_s=10\angle 0^\circ V$

$$X_L=\omega L=10^3\times 0.5=500\Omega \qquad X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\times 10^{-6}\times 10^3}=500\Omega$$

分压公式：

$$\dot{U}_2=\frac{R//(-jX_C)}{jX_L+R//(-jX_C)}\dot{U}_{s2}=\frac{500//(-j500)}{j500+500//(-j500)}10\angle 0^\circ=\frac{250-j250}{250+j250}\times 10=10\angle -90^\circ V$$

$$\text{则 } u_2(t)=10\sqrt{2}\cos(\omega t-90^\circ)V$$

（3）$u_{s3}(t)$单独作用时，$\dot{U}_{s3}=10\angle 0^\circ$

$$X_L=2\omega L=2\times 10^3\times 0.5=1000\Omega \qquad X_C=\frac{1}{2\omega C}=\frac{1}{2\times 2\times 10^{-6}\times 10^3}=250\Omega$$

分压公式：

$$\dot{U}_3=\frac{R//(-jX_C)}{jX_L+R//(-jX_C)}\dot{U}_{s3}=\frac{500//(-j250)}{j1000+500//(-j250)}10\angle 0^\circ=\frac{100-j200}{100+j800}\times 10=2.27\angle -146.3^\circ V$$

$$\text{则 } u_3(t)=2.27\sqrt{2}\cos(2\omega t-146.3^\circ)V$$

由叠加定理得：

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)=15+10\sqrt{2}\cos(\omega t-90^\circ)+2.27\sqrt{2}\cos(2\omega t-146.3^\circ)\ V$$

西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：680630306

西电811+821考研指导群：680630306

Quark 夸克 高清扫描 还原文档

练习： 课后题 4-15 4-16 4-17 4-18 4-19 4-20 4-21 4-22

4-23 4-24 4-25 4-26 4-27

电源等效 节点法 戴维南等效 叠加定理

晋程西电811+821考研指导群：680630306

3西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：680

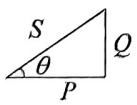
Quark 夸克 高清扫描 还原文档

5、正弦稳态电路的功率

（1）二端口电路的电压 u 和电源 i 取关联参考方向

$$u=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_u)\ ;\quad i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_i)$$

相位差 $\theta=\varphi_u-\varphi_i$ ； 阻抗 $Z=R+jX=|Z|\angle\theta_Z$ ； 导纳 $Y=G+jB=|Y|\angle\theta_Y$

	有功功率 P/W	无功功率 Q/var	视在功率 $S/(V\cdot A)$	复功率 $\tilde{S}/(V\cdot A)$	功率因数 λ
定义	$UI\cos\theta$	$UI\sin\theta$	UI	$\dot{U}\dot{I}^*=P+jQ$	$\cos\theta$
电阻 R	$UI=I^2R=\dfrac{U^2}{R}$	0	UI	UI	1
电感 L	0	$UI=X_LI^2=\dfrac{U^2}{X_L}$	UI	jUI	0
电容 C	0	$-UI=-X_CI^2=-\dfrac{U^2}{X_C}$	UI	$-jUI$	0
阻抗 Z	RI^2	XI^2	$\lvert Z\rvert\cdot I^2$	ZI^2	$\cos\theta_Z$
导纳 Y	GU^2	$-BU^2$	$\lvert Y\rvert\cdot U^2$	Y^*U^2	$\cos\theta_Y$
关系			$S=\sqrt{P^2+Q^2}$ $P=S\cdot\cos\theta$ $Q=S\cdot\sin\theta$	N 呈阻性 $\theta_Z=0$ $Q=0$ N 呈感性 $\theta_Z>0$ $Q>0$ N 呈容性 $\theta_Z<0$ $Q<0$	

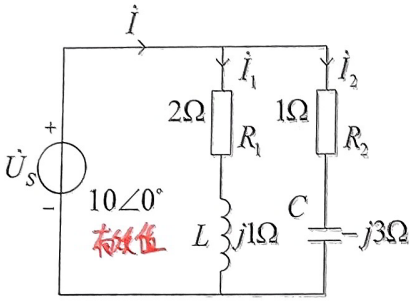
晋程西电811+821考研指导群：680630306

电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：680630306

Quark 夸克 高清扫描 还原文档

	功率三角形	$\theta=\arctan\frac{Q}{P}$
电路总功率与各支路功率的关系	设二端电路由 m 条支路组成，则总功率为 $P=\sum_{k=1}^{m}P_k$ ； $Q=\sum_{k=1}^{m}Q_k$ ； $\tilde{S}=\sum_{k=1}^{m}\tilde{S}_k$ $P_k,Q_k,\tilde{S}_k$ 分别为第 k 条支路的有功功率、无功功率和复功率	

例 4.5-1 如图所示电路，求：



（1）各元件吸收的功率；

（2）电源供给的功率。

解：（1） R_1 所在的支路阻抗 $Z_1=R_1+j\omega L=2+j1\Omega$

$$\text{则}\quad \dot{I}_1=\frac{\dot{U}_S}{Z_1}=\frac{10\angle 0^\circ}{2+j1}=4-j2=4.47\angle -26.6^\circ A$$

R_1 吸收的有功功率 $P_{R1}=I_1^2R_1=\left(\sqrt{4^2+2^2}\right)^2\times 2=40W$

L 吸收的无功功率 $Q_L=I_1^2X_L=20\times 1=20\,\text{var}$

$\tilde{S}_1=\dot{U}_S\cdot\dot{I}_1^*=10\angle 0^\circ\times 4.47\angle 26.6^\circ=44.7\angle 26.6^\circ=40+j20\ V\cdot A$

$$\text{则}\quad P_{R1}=40W\quad Q_L=20\,\text{var}$$

R_2 所在支路阻抗 $Z_2=1-j3\,\Omega$ 则 $\dot{I}_2=\frac{\dot{U}_S}{Z_2}=\frac{10\angle 0^\circ}{1-j3}=1+j3=3.16\angle 71.57^\circ A$

R_2 吸收的有功功率 $P_{R2}=I_2^2R_2=10\times 1=10W$

C 吸收的无功功率 $Q_C=-X_CI_2^2=-3\times 10=-30\,\text{var}$

$\tilde{S}_2=\dot{U}_S\cdot\dot{I}_2^*=10\angle 0^\circ\times 3.16\angle -71.57^\circ=10-j30\ V\cdot A$

$$\text{则}\quad P_{R2}=10W\quad Q_C=-30\,\text{var}$$

2023西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院A1院考研QQ群；

晋程西电811+821考研指导群：758630306

Quark 夸克 高清扫描 还原文档

（2）总电流 $\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=4.47\angle-26.6^\circ+3.16\angle71.57^\circ=4-j2+1+j3=5+j1\ A$

电源供给的复功率 $\tilde{S}=\dot{U}_S\dot{I}^*=10(5-j1)=50-j10\ V\cdot A$

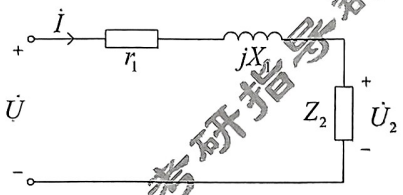
即 有功功率 $P=50W$　无功功率 $Q=-10\,\text{var}$

容易验证 $P=P_{R1}+P_{R2}$

$Q=Q_L+Q_C$

$\tilde{S}=\tilde{S}_1+\tilde{S}_2$

例 4.5-2 如图所示电路，已知 $r_1=X_1=6\Omega$。Z_2 为感性负载，其消耗功率为 $P=500kW$，Z_2 的端电压 $U_2=5.5kV$，功率因数 $\cos\theta_{Z2}=0.91$，求输入端电压的有效值 U 和输电线损耗的功率（即 r_1 消耗的功率）



解：设 $\dot{U}_2=5500\angle0^\circ V$　因为 $P=U_2I\cos\theta_{Z2}$

则 $I=\dfrac{P}{U_2\cos\theta_{Z2}}=\dfrac{500\times10^3}{5500\times0.91}=100A$　且 $\theta_{Z2}=\arccos0.91=\pm24.5^\circ$

因为 Z_2 为感性负载，所以 $\theta_{Z2}=24.5^\circ$　则 $\varphi_i=-24.5^\circ$　即 $\dot{I}=100\angle-24.5^\circ A$

由 KVL 得 $\dot{U}=(r_1+jX_1)\dot{I}+\dot{U}_2=(6+j6)\times100\angle-24.5^\circ+5500\angle0^\circ$

$=795+j297+5500=6302\angle2.7^\circ V$

则输入电压 $U=6302\,V$

r_1 消耗的功率 $P_{r1}=I^2r_1=100^2\times6=60kW$

练习：　课后题　4-28　4-29　4-30　4-31　4-32　4-33

叠加定理　节点方程、电源等效

西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：680630306

Quark 夸克 高清扫描 还原文档

（2）最大功率传输

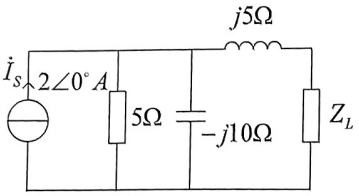
如果一有源线性二端电路 N（其开路电压的有效值为U_{oc}，戴维南等效阻抗为$Z_0 = R_0 + jX_0$）外接一可变阻抗Z_L

①当$Z_L = Z_0^* = R_0 - jX_0$时，阻抗Z_L可以从N中获得最大功率，其值为$P_{L\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_0}$

——共轭匹配；

②若Z_L为纯电阻R_L或仅$|Z_L|$可调，当$R_L = |Z_0|$或$|Z_L| = |Z_0|$时，Z_L上可获得在这种特定条件下的最大功率——模值匹配。

例 4.5-3 如图所示电路，在下列情况下，如何选择负载Z_L才能使负载吸收功率为最大？并求此时的功率



（1）负载由X_L和R_L串联组成，即

$Z_L = R_L + jX_L$

（2）负载为纯电阻R_L

解：对除Z_L之外的电路进行戴维南等效

$$\dot{U}_{oc} = [5 // (-j10)] \times 2\angle 0^\circ = \frac{5(-j10)}{5-j10} \times 2\angle 0^\circ = (4-j2) \times 2\angle 0^\circ = 8.94\angle -26.6^\circ V$$

$$Z_0 = j5 + 5 // (-j10) = j5 + 4 - j2 = 4 + j3\,\Omega$$

（1）$Z_L = Z_0^* = 4 - j3\,\Omega$时，负载吸收功率最大

$$P_{L\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_0} = \frac{8.94^2}{4\times 4} = 5W$$

（2）当$|Z_L| = R_L = |Z_0| = 5\Omega$时，负载吸收功率最大

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_0 + R_L} = \frac{8.94\angle -26.6^\circ}{9 + j3} \quad \text{则} \quad I = \frac{8.94}{\sqrt{9^2+3^2}} = 0.924A$$

负载吸收功率 $P_{L\max} = I^2 R_L = 4.44W$

练习： 课后题 4-34 4-35 4-36 4-37

123西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：6806

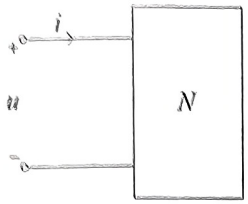
晋程西电811+821考研指导群：680630302

Quark 夸克 高清扫描 还原文档

（3）多频电路的平均功率和有效值

对于同频率的正弦量，其平均功率不能叠加计算；

对于不同频率（各频率之比为有理数）的正弦电流（或电压）形成的总平均功率等于每个正弦电流（或电压）单独作用时所形成的平均功率之和



$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2} U_k \cos\left(k\omega t + \varphi_{u_k}\right)$$

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2} I_k \cos\left(k\omega t + \varphi_{i_k}\right)$$

有效值：$U = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} U_k^2}$　　$I = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} I_k^2}$

平均功率：$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \cos\left(\varphi_{u_k} - \varphi_{i_k}\right)$

无功功率：$Q = \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \sin\left(\varphi_{u_k} - \varphi_{i_k}\right)$

视在功率：$S = UI$

功率因数：$\cos\theta = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$

例 4.5-4 电阻 $R = 10\Omega$，若其端电压

（1）$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 10\cos 2t + 20\cos\left(2t + 30^\circ\right) V$；

（2）$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = 10 + 20\cos 2t + 30\cos 3t \ V$

分别求以上两种情况下电阻 R 吸收的平均功率和电压的有效值

解：（1）$u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 的频率相同，故先将电源叠加求出总电压

$$\dot{U}_m = \dot{U}_{m1} + \dot{U}_{m2} = 10\angle 0^\circ + 20\angle 30^\circ = 10 + 10\sqrt{3} + j10 = 29.1\angle 20.1^\circ \ V$$

即 $u(t) = 29.1\cos\left(2t + 20.1^\circ\right) V$

吸收的平均功率 $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_m^2}{R} = \frac{1}{2} \times \frac{29.1^2}{10} = 42.3W$

智程西811+821考研指导群：680630306

3西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：680630306

Quark 夸克 高清扫描 还原文档

电源的有效值 $U=\frac{29.1}{\sqrt{2}}=20.58V$

（2）由于$u(t)$中的各项频率不同，且各角频率的比为有理数，可用叠加定理来计算平均功率。*（晋程 811+821 考研指导群：680630306）*

$u_1(t)=10V$ 单独作用时　　$P_1=\frac{U_0^2}{R}=\frac{10^2}{10}=10W$

$u_2(t)=20\cos 2t\,V$ 单独作用时　　$P_2=\frac{1}{2}\frac{U_{m2}^{\ 2}}{R}=\frac{1}{2}\times\frac{20^2}{10}=20W$

$u_3(t)=30\cos 3t\,V$ 单独作用时　　$P_3=\frac{1}{2}\frac{U_{m3}^{\ 2}}{R}=\frac{1}{2}\times\frac{30^2}{10}=45W$

则 R 吸收的平均功率　$P=P_1+P_2+P_3=10+20+45=75W$

有效值 $U=\sqrt{U_0^2+\left(\frac{U_{m2}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{U_{m3}}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{10^2+\left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{30}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{750}=27.39V$

也可以用有效值计算平均功率 $P=\frac{U^2}{R}=\frac{750}{10}=75W$

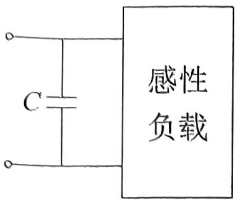
练习：　课后题　4-38　4-39

晋程西电811+821考研指导群：680630306

西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：680

Quark 夸克 高清扫描 还原文档

（4）提高功率因数（通过并联电容的方法）



在感性负载两端并联电容 C，提高功率因数

方法：并联电容前 $\dot{U}_S$，Z_L 求 P_L，Q_L，$\cos\theta_1$

并联电容 C 之后 $\cos\theta_2 \Rightarrow \sin\theta_2$

有功功率不变 $P = P_L$ 无功功率 $Q = \dfrac{P}{\cos\theta_2}\sin\theta_2$

则电容 C 的无功功率 $Q_C = Q - Q_L = -\omega C U_S^2$

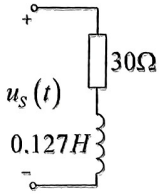
电容 $C = \dfrac{Q - Q_L}{-\omega U_S^2}$

例 4.5-5 如图所示，电路为一感性负载与 220V，50Hz 电源相连的电路，试求：

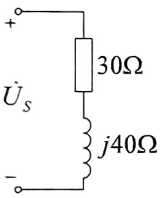
（1）并联电容前负载的功率因数和电路的各种功率。

（2）要使功率因数提高到 0.9，应并联多大的电容

（3）要使功率因数提高到 0.95，应并联多大的电容



解：（1）电路相量模型为 设 $\dot{U}_S = 220\angle 0^\circ V$



$j\omega L = j \times 2\pi \times 50 \times 0.127 = j40\Omega$

$Z = 30 + j40 = 50\angle 53.1^\circ\Omega$ 则功率因数 $\cos\theta = \cos 53.1^\circ = 0.6$

$\dot{I}_L = \dfrac{\dot{U}_S}{Z} = \dfrac{220\angle 0^\circ}{50\angle 53.1^\circ} = 4.4\angle -53.1^\circ A$

则 电阻吸收的平均功率 $P_0 = I_L^2 R = 4.4^2 \times 30 = 580.8W$

电感吸收的无功功率 $Q_0 = I_L^2 X_L = 4.4^2 \times 40 = 774.4\ \text{var}$

（2）$\cos\theta_1 = 0.9$ 则 $\sin\theta_1 = \sqrt{1-\cos^2\theta_1} = 0.44$ 且 $P_1 = P_0 = 580.8W$

$Q_1 = \dfrac{P_1}{\cos\theta_1}\sin\theta_1 = \dfrac{580.8}{0.9} \times 0.44 = 281.3\ \text{var}$

$Q_{C1} = Q_1 - Q_0 = 281.3 - 774.4 = -493.1\ \text{var}$ 且 $Q_{C1} = -\omega C_1 U_S^2$

晋程西电811+821考研指导群：680630306

3西电811+821考研专用，更多资料和指导答疑请加西电通院电院AI院考研QQ群：680630306

Quark 夸克 高清扫描 还原文档