2023
考研专用

金榜时代®
GLISTIME 明德·弘毅·惟精 98

金榜时代考研数学系列 | V研客及全国各大考研培训学校指定用书

高等数学

·基础篇·

主编◎武忠祥（西安交通大学）

方向✓ 学习高数不迷路 **深度分析大纲考点与要求**，先学基础不犹豫

方法✓ 培养思维破套路 **多角度多层次解析例题**，打破解题固有模式

训练✓ **避免“经典的错误”** 勤思考巧练题，不犯经典错误就是快人一步

微信扫码 查询真伪

中国大学MOOC | 有道考神

·内部讲义·

金榜時代®
GLISTIME 明德·弘毅·惟精
金榜时代考研数学系列

金榜时代考研数学系列 | V研客及全国各大考研培训学校指定用书

高等数学

·基础篇·

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

主编◎武忠祥（西安交通大学）

@考研路上一直奋斗的你

不抱有一丝幻想，不放弃一点机会，不停止一日努力。

中国大学MOOC | 有道考神

前　言

高等数学基础篇，高等数学是相对初等数学而言的，主要区别就是引入了变量、函数等概念。基础则是相对于提高、综合而言的，基础篇侧重知识点本身内容和基础运算的讲解。

高等数学是理工科大学必修课，也是考研的必考科目，所以对于同学来说非常重要，学好高等数学不仅能提高逻辑思维能力，同时对今后的考研、以至日后工作、进行研究都有帮助。那么如何能很好的学习高等数学呢？

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

1. 不要畏惧数学

大家都知道高数重要，同时也都听说高数很难，甚至闻“高数”色变，认定自己没有数学天赋。事实是，高数并没有那么可怕。编者多年教学，没见过智商不够，不能学好数学的同学。只要踏实学，认真做题，没有学不会学不好的，反而见过不少天赋很高的同学，不好好学，考试一塌糊涂。在这儿告诉同学们，认真对待数学学习，数学进步显而易见。因为多数同学学不好数学的主要原因是根本没有认真对待，觉得数学不好是理所当然的，学不好也没关系。这种想法也要不得。

2. 抓住核心

任何学科，基础内容常常是最重要的部分。高等数学本身就是数学和其他学科的基础，而高等数学有一些重要的基础内容，它是基石，关系到后续所有数学学习和提高。比如说，高数核心内容就是微积分，是研究函数的微观与宏观性质，研究函数的主要工具（方法）就是极限。这类知识肯定不能放弃。

复习之初，应先做到内容有大体上的了解和把握，然后抓住重点，稳扎稳打，一步一步地学习，对重点要足够耐心，前期坚持每天复习一遍所学的内容，后面逐渐增加复习的间隔时间。谨记：掌握重点，不是刷进度，也不是打卡。

3. 平时多练

做练习，这是数学自带的特点，是消化巩固知识极重要的一个环节。练习一般分成三个层次：一是基础练习。这类练习就是对基础知识的简单重复，增加对知识的掌握度和熟练度。

二是小结训练。要求多思考，多总结，然后举一反三。高数很多知识之间是相互关联的，需要通过一些练习题、例题把学过的知识拿到一起相互交叉，灵活运用，这样才能融会贯通。同时，归类由基础内容衍生出来的一些结论并记住，那么后期在解答综合题就会感到轻松。

三是针对特训。高等数学不可能一学，就全部领会掌握。做题出错也很正常。往往是存在一个难点，往后学习就很难继续，所以针对常错题要进行特训，争取早日突破。

三个层次的练习，需要反复，比如极限的计算、积分法等一时很难掌握，就需要反复训练，才可以完全学会。

本书是编者教学经验的一个小小总结，存在不足之处，望大家批评指正。如果同学自己看书学习感觉还是有困难，也可以听听编者讲的课，能够起到一定帮助作用，帮你更快上路。在最后，祝同学都能考上理想的学校！

编 者

2021 年 9 月

目录 Contents

第一章 函数 极限 连续 …… (1)

第一节 函数 …… (2)

一、函数的概念及常见函数 …… (2)

二、函数的性质 …… (4)

第二节 极限 …… (7)

一、极限的概念 …… (7)

二、极限的性质 …… (10)

三、极限的存在准则 …… (12)

四、无穷小量 …… (13)

五、无穷大量 …… (14)

第三节 函数的连续性 …… (33)

一、连续性的概念 …… (33)

二、间断点及其分类 …… (35)

三、连续性的运算与性质 …… (36)

四、闭区间上连续函数的性质 …… (36)

第二章 导数与微分 …… (40)

一、导数与微分的概念 …… (40)

二、导数公式及求导法则 …… (44)

三、高阶导数 …… (48)

第三章 微分中值定理及导数应用 …… (55)

一、微分中值定理 …… (55)

二、导数应用 …… (57)

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第四章 不定积分 …… (68)
一、不定积分的概念与性质 …… (68)
二、不定积分基本公式 …… (70)
三、三种主要积分法 …… (71)
四、三类常见可积函数积分 …… (75)

第五章 定积分与反常积分 …… (83)
第一节 定积分 …… (83)
一、定积分的概念 …… (83)
二、定积分的性质 …… (84)
三、积分上限的函数 …… (85)
四、定积分的计算 …… (85)
第二节 反常积分 …… (94)
一、无穷区间上的反常积分 …… (94)
二、无界函数的反常积分 …… (96)

第六章 定积分的应用 …… (101)
一、几何应用 …… (101)
二、物理应用(数学三不要求) …… (102)

第七章 微分方程 …… (106)
一、常微分方程的基本概念 …… (107)
二、一阶微分方程 …… (107)
三、可降阶的高阶方程(数学三不要求) …… (110)
四、高阶线性微分方程 …… (111)

第八章 多元函数微分学 …… (123)
第一节 多元函数的基本概念 …… (123)
一、多元函数的极限 …… (123)
二、多元函数的连续性 …… (124)
三、偏导数 …… (125)
四、全微分 …… (126)
第二节 多元函数的微分法 …… (130)
一、复合函数微分法 …… (130)
二、隐函数微分法 …… (130)
第三节 多元函数的极值与最值 …… (137)
一、无约束极值 …… (137)
二、条件极值及拉格朗日乘数法 …… (138)
三、最大最小值 …… (139)
第九章 二重积分 …… (142)
一、二重积分的概念及性质 …… (142)
二、二重积分的计算 …… (143)
第十章 无穷级数 …… (149)
第一节 常数项级数 …… (150)
一、级数的概念与性质 …… (150)
二、级数的审敛准则 …… (151)
第二节 幂级数 …… (156)
一、幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域 …… (156)
二、幂级数的性质 …… (157)
三、函数的幂级数展开 …… (157)
第三节 傅里叶级数 …… (164)
一、傅里叶系数与傅里叶级数 …… (164)
二、收敛定理(狄利克雷) …… (164)
三、周期为 2π 的函数的展开 …… (165)
四、周期为 $2l$ 的函数的展开 …… (165)

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第十一章 向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用 …… (169)

第一节 向量代数 …… (169)
第二节 空间平面与直线 …… (171)
第三节 曲面与空间曲线 …… (174)
第四节 多元微分学在几何上的应用 …… (176)

第十二章 多元积分学及其应用 …… (179)

第一节 三重积分 …… (179)
三重积分 …… (179)
第二节 曲线积分 …… (183)
一、对弧长的线积分(第一类线积分) …… (183)
二、对坐标的线积分(第二类线积分) …… (184)
二、第二类线积分的计算 …… (187)
第三节 曲面积分 …… (190)
一、对面积的面积分(第一类面积分) …… (190)
二、对坐标的面积分(第二类面积分) …… (191)
第四节 多元积分应用 …… (195)
第五节 场论初步 …… (197)

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第一章　函数 极限 连续

大纲考试内容	大纲考试要求		
	数一	数二	数三
函数的概念 复合函数及分段函数的概念 无穷小量的概念 函数连续性的概念(含左连续与右连续) 闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)	理解	理解	理解
函数的表示法 基本初等函数的性质及其图形 极限的四则运算法则 利用两个重要极限求极限的方法 无穷小量的比较方法	掌握	掌握	掌握
函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 反函数及隐函数的概念 初等函数的概念 连续函数的性质和初等函数的连续性	了解	了解	了解
应用问题的函数关系	会建立	会建立	会建立
函数间断点的类型	会判别	会判别	会判别
闭区间上连续函数的性质	会应用	会应用	会应用
数列极限和函数极限的概念 函数左极限与右极限的概念 函数极限存在与左极限、右极限之间的关系	理解	理解	理解
无穷大量的概念 无穷大量与无穷小量的关系	理解	理解	理解
极限的性质与极限存在的两个准则	掌握	掌握	了解
极限存在的两个准则求极限	会利用	会利用	了解
等价无穷小量求极限	会用	会用	会用
无穷小量的基本性质	理解	理解	理解

第一节　函数

考试内容概要

一、函数的概念及常见函数

1. 函数

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$，变量 x 按照一定的法则总有一个确定的数值 y 和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为函数的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f = D$.

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

【注】　函数有两个基本要素：定义域、对应规则（或称依赖关系）. 当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，它们就是同一函数.

【例 1】　函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

称为**符号函数**.

【例 2】　设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记为 $[x]$. 函数 $y = [x]$ 称为**取整函数**.

【注】　取整函数的基本不等式：$x - 1 < [x] \leqslant x$.

2. 复合函数

定义　设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u = g(x)$ 的定义域为 D_g，值域为 R_g，若 $D_f \cap R_g \neq \varnothing$，则称函数 $y = f[g(x)]$ 为函数 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的**复合函数**. 它的定义域为 $\{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$.

【注】　不是任何两个函数都可以复合，如 $y = f(u) = \ln u$ 和 $u = g(x) = \sin x - 1$ 就不能复合，这是由于 $D_f = (0, +\infty)$，$R_g = [-2, 0]$，$D_f \cap R_g = \varnothing$.

3. 反函数

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_y. 若对任意 $y\in R_y$，有唯一确定的 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，则记为 $x=f^{-1}(y)$，称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

【注】 (1) 不是每个函数都有反函数. 如 $y=x^3$ 有反函数，而 $y=x^2$ 没有反函数.

(2) 单调函数一定有反函数，但反之则不然，如 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 3-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 有反函数，但不单调.

(3) 有时也将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$. 在同一直角坐标系中，$y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 的图形重合，$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(4) $f^{-1}[f(x)]=x$，$f[f^{-1}(x)]=x$.

【例 3】 求函数 $y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

解

由 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 知

$$e^{2x}-2ye^x-1=0,$$

解得 $e^x=y\pm\sqrt{1+y^2}$.

由于 $e^x>0$，则

$$e^x=y+\sqrt{1+y^2},$$

$$x=\ln(y+\sqrt{1+y^2}),$$

则函数 $y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

4. 初等函数

定义 将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为**基本初等函数**.

幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数）

(1) 幂函数 $y=x^{\mu}$ 的定义域和值域取决于 μ 的取值，当 $x>0$ 时，$y=x^{\mu}$ 都有定义.

(2) 常见幂函数：$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\sqrt{x}$，$y=\sqrt[3]{x}$，$y=\dfrac{1}{x}$.

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

(1) 定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$(0,+\infty)$.

(2) 单调性：当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 单调增；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 单调减.

(3) 常见指数函数：$y=e^x$，单调增，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

(1) 定义域：$(0,+\infty)$，值域：$(-\infty,+\infty)$.

(2) 单调性：当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 单调增；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 单调减.

(3) 常见对数函数：$y=\ln x$，单调增，$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

(1) 正弦函数 $\sin x$ 与余弦函数 $\cos x$

① 定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$[-1,1]$.

② 奇偶性：$\sin x$ 是奇函数，$\cos x$ 是偶函数.

③ 周期性：$\sin x$ 和 $\cos x$ 都以 2π 为周期.

④ 有界性：$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$.

(2) 正切函数 $\tan x$ 与余切函数 $\cot x$

① 定义域：

$\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 的一切实数 x；

$\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的一切实数 x.

② 奇偶性：$\tan x$ 和 $\cot x$ 都是奇函数.

③ 周期性：$\tan x$ 和 $\cot x$ 都以 π 为周期.

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$

(1) 反正弦函数 $\arcsin x$ 与反余弦函数 $\arccos x$

① 定义域：$[-1,1]$，值域：$\arcsin x$ 的值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\arccos x$ 的值域为 $[0,\pi]$.

② 单调性：$\arcsin x$ 单调增，$\arccos x$ 单调减.

③ 奇偶性：$\arcsin x$ 是奇函数.

④ 有界性：$|\arcsin x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$|\arccos x|\leqslant\pi$.

(2) 反正切函数 $\arctan x$

① 定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

② 单调性：$\arctan x$ 单调增.

③ 奇偶性：$\arctan x$ 是奇函数.

④ 有界性：$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$.

定义　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合所构成并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

二、函数的性质

1. 单调性

定义　设函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上有定义，如果对于区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$ 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $y=f(x)$ 在该区间内**单调增加**（或**单调减少**）.

【注】 函数的单调性主要是利用单调性的定义和一阶导数的正负进行判定.

2. 奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则有 $-x\in D$),对于任意 $x\in D$,如果恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的**偶函数**;如果恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的**奇函数**.

【注】 (1)$\sin x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arctan x$, $\ln\dfrac{1-x}{1+x}$, $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $f(x)-f(-x)$ 都是奇函数;x^2, $|x|$, $\cos x$, $f(x)+f(-x)$ 都是偶函数.

(2) 奇函数 $y=f(x)$ 的图形关于原点对称,且若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义,则 $f(0)=0$;偶函数的图形关于 y 轴对称.

(3) 两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数,两个奇(偶)函数之积必为偶函数,奇函数与偶函数之积必为奇函数.

【例 4】 证明 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

证

显然 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的定义域关于原点对称. 由于

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\qquad\text{(有理化)}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

则 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

微信公众号: djky66
(顶尖考研祝您上岸)

3. 周期性

定义 若存在实数 $T>0$,对于任意 x,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**. 使得上述关系式成立的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的**最小正周期**,简称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

【注】 (1)$\sin x$ 和 $\cos x$ 以 2π 为周期,$\sin 2x$, $|\sin x|$, $\tan x$, $\cot x$ 以 π 为周期.

(2) 若 $f(x)$ 以 T 为周期,则 $f(ax+b)$ 以 $\dfrac{T}{|a|}$ 为周期.

4. 有界性

定义 设 $y=f(x)$ 在集合 X 上有定义. 若存在 $M>0$,使得对任意的 $x\in X$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 X 上为**有界函数**. 否则称 $f(x)$ 在 X 上为**无界函数**,即:如果对任意的 $M>0$,至少存在一个 $x_0\in X$,使得 $|f(x_0)|>M$,则 $f(x)$ 为 X 上的**无界函数**.

【注】 (1) 如果没有指明 x 的范围，而说“$f(x)$ 为有界函数”，是指 $f(x)$ 在其定义域上为有界函数.

(2) 常见的有界函数：

$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，$|\arcsin x|\leqslant \frac{\pi}{2}$，$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$，$|\operatorname{arccot} x|\leqslant \pi$.

【例 5】 证明函数 $f(x)=x\sin x$ 是无界函数.

证

由于 $f\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，所以，对于任意的 $M>0$，只要正整数 n 充分大，总有

$$\left|f\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=2n\pi+\frac{\pi}{2}>M,$$

故函数 $f(x)=x\sin x$ 是无界函数.

常考题型与典型例题

常考题型

1. 函数有界性、单调性、周期性及奇偶性的判定
2. 复合函数

一、函数有界性、单调性、周期性及奇偶性的判定

【例 6】 (1990，数四)[①] 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数.　　(B) 无界函数.

(C) 周期函数.　　(D) 单调函数.

本例题解析将会在微信公众号金榜时代考研中公布(后同)

【B】

① 指 1990 年数学四试卷的考题. 后同.

二、复合函数

【例 7】 (2001,数二) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]$ 等于

(A)0. (B)1. (C)$\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ (D)$\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

解

当 $|x|\leqslant 1$ 时,$f(x)=1$,$|1|\leqslant 1$,则 $f[f(x)]=1$;

当 $|x|>1$ 时,$f(x)=0$,$|0|\leqslant 1$,则 $f[f(x)]=1$;

则 $f[f(x)]=1$,故应选(B).

【例 8】 (1988,数一、二) 已知 $f(x)=\sin x$,$f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)=$_____ 的定义域为_____.

解

由 $f(x)=\sin x$,$f[\varphi(x)]=1-x^2$,知

$$\sin\varphi(x)=1-x^2,$$

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2),$$

这里 $|1-x^2|\leqslant 1$,由此解得 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

第二节 极限

考试内容概要

一、极限的概念

1. 数列的极限

定义 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,当 $n>N$ 时,恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立,则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷时的**极限**,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【注】 (1)ε 是用来刻画 x_n 与 a 的接近程度,N 是用来刻画 $n\to\infty$ 这个极限过程.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的几何意义是:对于 a 点的任何 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$,一定存在 N,当 $n>N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内,而只有有限个(最多有 N 个)在这区间之外.

(3) 数列$\{x_n\}$的极限是否存在，如果存在极限值等于多少与数列的前有限项无关.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$.

【例 1】 (2006，数三) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$_____.

解

【方法 1】 当n为奇数时，$x_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-1}=\dfrac{n}{n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

当n为偶数时，$x_n=\dfrac{n+1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$.

【方法 2】 由于 $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-1}\leqslant\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}\leqslant\dfrac{n+1}{n}$，

由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$.

【例 2】 试证明：

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，但反之不成立；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$的充分必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$.

证

(1) 由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$及数列极限定义知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

又$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，

$$||x_n|-|a||<\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

反之不成立，例如$x_n=(-1)^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1=|1|$，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在.

(2) 由(1)可知，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|0|=0$.

所以，以下只要证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

由$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，

$$||x_n|-0|<\varepsilon,$$

即$|x_n-0|<\varepsilon$. 故原题得证.

2. 函数的极限

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 若对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$X>0$，当$x>X$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数A为$f(x)$当$x\to+\infty$时的**极限**，记为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

定义 若对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$X>0$，当$x<-X$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数A为$f(x)$当$x\to-\infty$时的**极限**，记为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

定义 若对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$X>0$，当$|x|>X$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数A为$f(x)$当$x\to\infty$时的**极限**，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

【注】 这里的$x\to\infty$是指$|x|\to+\infty$；而数列极限中的$n\to\infty$是指$n\to+\infty$.

定理 极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在的充要条件是极限$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$及$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在并且相等.

自变量趋于有限值时函数的极限

定义 若对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**极限**，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

【注】 (1)ε是用来刻画$f(x)$与A的接近程度，δ是用来刻画$x\to x_0$这个极限过程.

(2) 几何意义：对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\mathring{U}(x_0,\delta)$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，曲线$y=f(x)$夹在两直线$y=A-\varepsilon$和$y=A+\varepsilon$之间.

(3) 这里$x\to x_0$，但$x\neq x_0$. 极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在，如果存在极限值等于多少与$f(x)$在$x=x_0$处有没有定义，如果有定义函数值等于多少无关，只与$x=x_0$的去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$函数值有关. 而要使$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$f(x)$必须在$x=x_0$的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$处处有定义.

定义 若对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当$x_0-\delta<x<x_0$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**左极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A,\text{或 }f(x_0^-)=A,\text{或 }f(x_0-0)=A.$$

定义 若对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**右极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A,\text{或 }f(x_0^+)=A,\text{或 }f(x_0+0)=A.$$

定理 极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件是左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$及右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$存在并且相等.

【注】 需要分左、右极限求极限的问题常见有以下三种：

(1) 分段函数在分界点处的极限，而在该分界点两侧函数表达式不同(这里也包括带有绝对值的函数，如$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$).

(2)e^{∞}型极限(如$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}$)

$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，则$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$不存在；

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$，则$\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}$不存在.

【注】 $e^{\infty}\neq\infty$，$e^{+\infty}=+\infty$，$e^{-\infty}=0$.

(3)arctan ∞ 型极限(如$\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$)

$\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$，则$\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x}$不存在；

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

【注】 $\arctan\infty\neq\dfrac{\pi}{2}$，$\arctan(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$，$\arctan(-\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$.

【例 3】 (1992，数一、二、三) 当 $x\to1$ 时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限

(A) 等于 2. (B) 等于 0. (C) 为 ∞. (D) 不存在但不为 ∞.

解

本题中出现 e^{∞}，所以要分左、右极限

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{1}e^{\frac{1}{x-1}}=2\times0=0,$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

所以$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$不存在，但不是 ∞，应选 (D).

【例 4】 (2021，数三) 已知$\lim\limits_{x\to0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$存在，求 a 的值.

解

由于$\lim\limits_{x\to0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$存在，且

$$\lim_{x\to0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to0^-}a\arctan\frac{1}{x}+\lim_{x\to0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}=-\frac{\pi}{2}a+\frac{1}{e},$$

$$\lim_{x\to0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to0^+}a\arctan\frac{1}{x}+\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{\pi}{2}a+e,$$

则$-\dfrac{\pi}{2}a+\dfrac{1}{e}=\dfrac{\pi}{2}a+e$，故 $a=\dfrac{1-e^2}{\pi e}$.

二、极限的性质

1. 有界性

(数列) 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

【注】 反之不成立，反例为 $x_n=(-1)^n$. 显然，该数列有界但不收敛，由此可得有界是

数列收敛的必要条件而非充分条件，无界数列一定发散，但发散数列不一定无界.

（函数）若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则$f(x)$在$x_0$某去心邻域有界（即局部有界）.

【注】 反之不成立，反例为$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，该函数在$x=0$的去心邻域有界，但它在$x=0$处的极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

2. 保号性

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（数列）设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

(1) 如果$A>0$（或$A<0$），则存在$N>0$，当$n>N$时，$x_n>0$（或$x_n<0$）；

(2) 如果存在$N>0$，当$n>N$时，$x_n\geqslant 0$（或$x_n\leqslant 0$），则$A\geqslant 0$（或$A\leqslant 0$）.

【注】 注意结论(1)中是严格不等号（$>$或$<$）；而(2)中是非严格不等号（$\geqslant$或$\leqslant$）.

（函数）设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

(1) 如果$A>0$（或$A<0$），则存在$\delta>0$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，$f(x)>0$（或$f(x)<0$）.

(2) 如果存在$\delta>0$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，$f(x)\geqslant 0$（或$f(x)\leqslant 0$），那么$A\geqslant 0$（或$A\leqslant 0$）.

【例 5】 (1995，数三) 设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点$x=a$处

(A)$f(x)$的导数存在，且$f'(a)\neq 0$.　　(B)$f(x)$取得极大值.

(C)$f(x)$取得极小值.　　(D)$f(x)$的导数不存在.

解

【方法 1】 **直接法**　因为$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1<0$，由极限保号性知，存在$\delta>0$，当$x\in\mathring{U}(a,\delta)$时，

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0.$$

又因为当$x\in\mathring{U}(a,\delta)$时，$(x-a)^2>0$，则$f(x)-f(a)<0$，即

$$f(x)<f(a).$$

由极值的定义得在点$x=a$处$f(x)$取得极大值.

【方法 2】 **排除法**　令$f(x)=-(x-a)^2$，显然$f(x)$满足题设条件，但在$x=a$处$f(x)$可导且$f'(a)=0$，取极大值，则选项(A)(C)(D)都不正确，故应选(B).

3. 极限值与无穷小之间的关系

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$$

其中$\lim\alpha(x)=0$.

三、极限的存在准则

1. 夹逼准则

若存在 N，当 $n>N$ 时，$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

2. 单调有界准则

单调有界数列必有极限. 即单调增(减) 有上(下) 界的数列必有极限.

【注】 (1) 夹逼准则比较多地用在求 n 项和的数列极限上，而单调有界准则比较多地是用在求递推关系 $x_{n+1} = f(x_n)$ 所定义的数列极限上；(2) 函数极限也有对应的以上两条存在准则.

【例 6】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

解

由于

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} \leqslant \frac{n^2}{n^2+1},$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1.$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right) = 1.$

【例 7】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解

由于

$$\frac{1}{x}-1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x},$$

上式两端同乘以 x 得

$$1-x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1,$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 1.$

【例 8】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

解

【方法 1】 由于 n 足够大时有

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2\times 2\times 2\times\cdots\times 2}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n} = \frac{2}{1}\times\frac{2\times 2\times\cdots\times 2}{2\times 3\times\cdots\times(n-1)}\times\frac{2}{n} < \frac{4}{n}.$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$，由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0.$$

【方法 2】 令$x_n=\frac{2^n}{n!}$，则$x_{n+1}=x_n\cdot\frac{2}{n+1}$，

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{n+1}\leqslant 1,$$

则数列$\{x_n\}$单调减. 又$x_n=\frac{2^n}{n!}>0$，即$\{x_n\}$下有界，由单调有界准则知数列$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，等式

$$x_{n+1}=x_n\cdot\frac{2}{n+1},$$

两端取极限得

$$a=a\cdot 0$$

则$a=0$.

四、无穷小量

1. 无穷小量的概念

若函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的极限为零，则称$f(x)$为$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的**无穷小量**.

2. 无穷小的比较

设$\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$，且$\beta(x)\neq 0$.

(1) 高阶：若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$；

(2) 低阶：若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$；

(3) 同阶：若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$；

(4) 等价：若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$；

(5) 无穷小的阶：若$\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C\neq 0$，则称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$阶无穷小.

【例 9】 (2013，数二) 设$\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中$|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$，则当$x\to 0$时，$\alpha(x)$是

(A) 比x高阶的无穷小量.

(B) 比 x 低阶的无穷小量.

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小量.

(D) 与 x 等价的无穷小量.

解 由于 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$,则

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

即有 $\lim\limits_{x\to0}\sin\alpha(x)=0$,又 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$,则 $\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=-\frac{1}{2}.$$

故应选(C).

3. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的和仍是无穷小.

(2) 有限个无穷小的积仍是无穷小.

(3) 无穷小量与有界量的积仍是无穷小.

【注】 以上前两条中的有限二字不能少.

五、无穷大量

1. 无穷大量的概念

若函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时趋向于无穷,则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷大量**.即:若对任意给定的 $M>0$,总存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)|>M$,则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的**无穷大量**.

2. 常用的一些无穷大量的比较

(1) 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\ln^\alpha x\ll x^\beta\ll a^x,\text{其中 }\alpha>0,\beta>0,a>1.$$

【注】 $\ll$ 是远小于号,这些结论可以用洛必达法则证明.

(2) 当 $n\to\infty$ 时,

$$\ln^\alpha n\ll n^\beta\ll a^n\ll n!\ll n^n,\text{其中 }\alpha>0,\beta>0,a>1.$$

【例 10】 (2010,数三)设 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{10}}$,则当 x 充分大时,有

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$.　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$.

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$.　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$.

解 由于当 $x \to +\infty$ 时，

$$\ln^{\alpha} x \ll x^{\beta} \ll a^{x}, \text{其中 } \alpha > 0, \beta > 0, a > 1,$$

则当 x 充分大时，有 $\ln^{10} x \ll x \ll \mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$.

故应选(C).

3. 无穷大量的性质

(1) 两个无穷大量的积仍为无穷大量.

(2) 无穷大量与有界变量之和仍为无穷大量.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

4. 无穷大量与无界变量的关系

我们以数列为例说明无穷大量与无界变量的关系. 首先回忆这两个概念：

(1) 数列 $\{x_n\}$ 是**无穷大量**：$\forall M > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n| > M$.

(2) 数列 $\{x_n\}$ 是**无界变量**：$\forall M > 0, \exists N > 0$，使 $|x_N| > M$.

由以上两个定义不难看出**无穷大量必为无界变量，而无界变量不一定是无穷大量.**

【例 11】 数列 $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数}, \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ 是无界变量但不是无穷大量.

解 由于 $\forall M > 0$，存在奇数 n，使得 $x_n = n > M$，则数列 $\{x_n\}$ 是无界变量.

又因为 $\forall M > 0$，不论 N 多么大，总存在偶数 n，使 $n > N$，但 $x_n = 0$，恒有 $|x_n| < M$. 所以 $\{x_n\}$ 不是无穷大量.

【例 12】 (1991，数五) 设数列的通项为 $x_n = \begin{cases} \dfrac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数}, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 则当 $n \to \infty$ 时，x_n 是

(A) 无穷大量. (B) 无穷小量. (C) 有界变量. (D) 无界变量.

解 当 n 为奇数时，$x_n = \dfrac{n^2 + \sqrt{n}}{n} = n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \left(n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = +\infty.$$

当 n 为偶数时，$x_n = \dfrac{1}{n}$.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

则 x_n 是无界变量但不是无穷大量，故应选(D).

5. 无穷大量与无穷小量的关系

在同一极限过程中，如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小；反之，如果 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

【例 13】 $f(x)\equiv 0$，是 $x\to x_0$ 时的无穷小量，但 $\frac{1}{f(x)}$ 无意义，所以不是无穷大量.

常考题型与典型例题

常考题型

1. 极限的概念、性质及存在准则
2. 求极限
3. 无穷小量阶的比较

一、极限的概念、性质及存在准则

【例 14】 (1999，数二)“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件.　　(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非必要也非充分条件.

解 由数列极限定义知，如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立. 由于 $\varepsilon<2\varepsilon$，则必有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$.

如果对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$.

由于 ε 的任意性，则对于任意给定的 $\varepsilon_1>0$，取 $\varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{3}$，则当 $n\geqslant N$ 时，恒有

$$|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon=\frac{2\varepsilon_1}{3}<\varepsilon_1.$$

由数列极限定义知，数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，故应选(C).

【例 15】 (2015，数三) 设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$.

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$.

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

解

(D) 选项的命题不正确，例如 $x_{3n}=x_{3n+1}=1$，而 $x_{3n+2}=0$.

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+2}=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

【例 16】 (1993，数三) 当 $x\to0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小.　　(B) 无穷大.

(C) 有界的，但不是无穷小.　　(D) 无界的，但不是无穷大.

解

对任意给定的 $M>0$ 及 $\delta>0$，总存在

$$x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},y_n=\frac{1}{2n\pi},$$

使得 $0<x_n<\delta,0<y_n<\delta$，此时

$$\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n}=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2>M,\frac{1}{y_n^2}\sin\frac{1}{y_n}=0<M,$$

则当 $x\to0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是无界的，但不是无穷大.

二、求极限

常用的求极限方法 (8 种)

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

方法 1　利用基本极限求极限

1. 常用的基本极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0).$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \infty, & |x|>1,\\ 1, & x=1,\\ \text{不存在}, & x=-1.\end{cases}\qquad\lim_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}0, & x<0,\\ +\infty, & x>0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

2. “1^∞”型极限常用结论

若 $\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=\infty$，且 $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$，则

$$\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}=e^A.$$

可以归纳为以下三步：

(1) 写标准形式：原式 $=\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}$；

(2) 求极限：$\lim \alpha(x)\beta(x) = A$；

(3) 写结果：原式 $= \mathrm{e}^{A}$.

【例 17】 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\sin\dfrac{1}{n}$.

解

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

【注】 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = 1$ 是“经典错误”，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

【例 18】 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x =$

(A) 1. (B) e.

(C) e^{a-b}. (D) e^{b-a}.

解

【方法 1】 直接法

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-a}\right)^x\left(\frac{x}{x+b}\right)^x \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-x}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{a}\cdot\mathrm{e}^{-b} = \mathrm{e}^{a-b}.\end{aligned}$$

故应选(C).

【方法 2】 排除法 取 $a = 0$，则

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+b}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-b}{x+b}\right)^x = \mathrm{e}^{-b},$$

则选项(A)(B)(D)都不正确，故应选(C).

【例 19】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$，其中 $a>0, b>0, c>0$.

解

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right)^n.$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right)n &= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)+(\sqrt[n]{c}-1)}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c) = \ln\sqrt[3]{abc}.\end{aligned}$$

$$\text{原式} = \mathrm{e}^{\ln\sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}.$$

方法 2　利用等价无穷小代换求极限

1. 代换原则

(1) 乘除关系可以换

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$，则 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha_1}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha}{\beta_1} = \lim \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

(2) 加减关系在一定条件下可以换

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$，且 $\lim \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$，则 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$.

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$，且 $\lim \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$，则 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$.

2. 常用的等价无穷小　当 $x \to 0$ 时

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$,

$(1+x)^a - 1 \sim ax$,　$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$,　$a^x - 1 \sim x \ln a$,

$x - \sin x \sim \dfrac{1}{6}x^3$,　$\tan x - x \sim \dfrac{1}{3}x^3$,　$x - \ln(1+x) \sim \dfrac{1}{2}x^2$,

$\arcsin x - x \sim \dfrac{1}{6}x^3$,　$x - \arctan x \sim \dfrac{1}{3}x^3$.

【例 20】 (2016，数三) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ _____.

解

由 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}-1) = 0$ 知，

$$\lim_{x\to 0} f(x)\sin 2x = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x} \quad \text{(等价无穷小代换)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}f(x)\cdot 2x}{3x} \quad \text{(等价无穷小代换)}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} f(x) = 2,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 6$.

【例 21】 (2015,数一) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ _____.

解

【方法 1】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$ (等价无穷小代换)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

【方法 2】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}$

$=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

$=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=-\dfrac{1}{2}$.

【方法 3】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)-\ln 1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\xi}(\cos x-1)}{x^2}$ (拉格朗日中值定理,$\xi\in(\cos x,1)$)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

【例 22】 (2009,数三) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ _____.

解

【方法 1】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\cos x}(\mathrm{e}^{1-\cos x}-1)}{\frac{1}{3}x^2}$

$=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}$ (等价无穷小代换)

$=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}$.

【方法 2】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}$ (等价无穷小代换)

$=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\xi}(1-\cos x)}{x^2}$ (拉格朗日中值定理,$\xi\in(\cos x,1)$)

$=3\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}$.

【方法 3】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\cos x}\sin x}{\frac{2}{3}x}$（洛必达法则）

$=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}$.

【例 23】（2006，数二）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解

【方法 1】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}$ （等价无穷小代换）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$ （等价无穷小代换）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

【方法 2】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)^x-1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\dfrac{\cos x-1}{3}\right)}{x^3}$ （等价无穷小代换）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$.

【注】 当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$. 这个结论推广可得，若 $\alpha(x)\to 0$，$\alpha(x)\beta(x)\to 0$，则

$$(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1\sim\alpha(x)\beta(x).$$

由此可得 $\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)^x-1\sim\dfrac{x(\cos x-1)}{3}$.

【例 24】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$.

解

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\arcsin x-x)-(\sin x-x)}{(\arctan x-x)-(\tan x-x)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{6}x^3\right)-\left(-\frac{1}{6}x^3\right)}{\left(-\frac{1}{3}x^3\right)-\left(\frac{1}{3}x^3\right)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{-\frac{2}{3}x^3}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

【例 25】 (2009，数二) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

解

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\tan x)-[\ln(1+\tan x)-\tan x]}{x^2}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{3}x^3\right)-\left(-\frac{1}{2}\tan^2 x\right)}{x^2}\\
&=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

方法 3　利用有理运算法则求极限

有理运算法则　若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$.

那么：$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$.

$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$.

$\lim\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\ (B\neq 0)$.

【注】 (1) 存在 ± 不存在 = 不存在；　(2) 不存在 ± 不存在 = 不一定；

(3) 存在 ×(÷) 不存在 = 不一定；　(4) 不存在 ×(÷) 不存在 = 不一定.

常用的结论：(1) $\lim f(x)=A\neq 0\Rightarrow\lim f(x)g(x)=A\lim g(x)$；

即：极限非零的因子的极限可先求出来.

(2) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，$\lim g(x)=0\Rightarrow\lim f(x)=0$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，$\lim f(x)=0\Rightarrow\lim g(x)=0$.

【例 26】 (2010,数三) 若$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^{x}\right]=1$,则 a 等于

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

解

$$1=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{x}}{x}\right)+a\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{x}=-1+a,$$

则 $a=2$.

故应选 (C).

【例 27】 (2018,数三) 已知实数 a,b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$,求 a,b.

解

$$\begin{aligned}2&=\lim_{x\to+\infty}b\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to+\infty}(ax\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x)\\&=b+\lim_{x\to+\infty}x(a\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)\\&=b+\lim_{x\to+\infty}x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)\qquad(a=1)\\&=b+\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{x}\qquad(\text{等价无穷小代换})\\&=b+1,\end{aligned}$$

故 $a=b=1$.

【例 28】 (2004,数三) 若极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^{x}-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$_____,$b=$_____.

解

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^{x}-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-b)}{\mathrm{e}^{x}-a}=5\neq 0$$

且$\lim\limits_{x\to 0}\sin x(\cos x-b)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^{x}-a)=0$,即 $a=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^{x}-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^{x}-1}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b,$$

由 $1-b=5$ 得,$b=-4$.

【例 29】 (1997,数二) 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^{2}+x-1}+x+1}{\sqrt{x^{2}+\sin x}}$.

解

【方法 1】 原式$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{2}}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^{2}}}}$ (分子分母同除以 $-x$)

$=1$.

【方法2】 原式$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$（拆项）

$=2-1+0=1.$

方法4 利用洛必达法则求极限

洛必达法则

若 (1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0(\infty)$；

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)，

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

【注】 (1) 洛必达法则适用类型

洛必达法则可用来求七种类型不定式的极限，即$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,1^{\infty},\infty^{0},0^{0}$，其中前两种$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$直接用洛必达法则，后五种均可化为前两种.

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\Leftarrow\begin{cases}0\cdot\infty\Leftarrow\begin{cases}1^{\infty}\\ \infty^{0}\\ 0^{0}\end{cases}\\ \infty-\infty\end{cases}$$

(2) 使用洛必达法则应该注意的几个问题

① 使用洛必达法则之前，应该先检验其条件是否满足；

② 使用洛必达法则之后，如果问题仍然是未定型极限，且仍符合洛必达法则条件，可以再次使用洛必达法则；

③ 如果“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型极限中的函数含有极限非零的因子，可以单独求极限，不必参与洛必达法则运算，以简化运算；

④ 如果能进行等价无穷小量代换或恒等变形配合洛必达法则使用，也可以简化运算.

【例30】 求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$.

解

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{-\tan(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}\qquad\text{（洛必达法则）}$$

$$= \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\cos\frac{\pi}{2}x} \qquad (\tan(x-1)\sim x-1)$$

$$= \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x} \qquad (\text{洛必达法则})$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}.$$

【例 31】 (1988,数三) 求极限$\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x$.

【$\frac{4}{\pi}$】

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【例 32】 求极限$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1} = 0, \quad (\text{洛必达法则})$$

则$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

【例 33】 设 $f(x)$ 二阶可导,$f(0)=0$,$f'(0)=1$,$f''(0)=2$. 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}$.

解

【方法 1】 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}$ (洛必达法则)

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$

$$= \frac{f''(0)}{2} \qquad (\text{导数定义})$$

$$= 1.$$

【方法 2】 函数 $f(x)$ 带有皮亚诺余项的二阶麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2),$$

即
$$f(x)=x+x^2+o(x^2).$$

则
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1.$$

【注】 经典错误:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(0)}{2}=1.$

方法 5 利用泰勒公式求极限

定理(带皮亚诺余项的泰勒公式) 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导,则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n].$$

特别是当 $x_0=0$ 时,

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

几个常用的泰勒公式

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n).$

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1}).$

(3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}).$

(4) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n).$

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$

【例 34】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解

【方法 1】 由泰勒公式知

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4),$$

则原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\dfrac{1}{12}.$

【方法 2】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x+xe^{-\frac{x^2}{2}}}{4x^3}$（洛必达法则）

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)-x(1-e^{-\frac{x^2}{2}})}{x^3}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{6}x^3\right)-\left(\frac{1}{2}x^3\right)}{x^3}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{12}.$$

【例 35】 (1994，数三) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则

(A) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$.　　(B) $a=0,b=-2$.

(C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$.　　(D) $a=1,b=-2$.

解

【方法 1】 $2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-(ax+bx^2)}{x^2}$（泰勒公式）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x-\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+o(x^2)}{x^2},$$

则 $1-a=0,-\left(\dfrac{1}{2}+b\right)=2$，即 $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$.

故应选(A).

【方法 2】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$ 知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}\cdot x=0,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x}=0$，则 $a=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}-b=2,$$

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}-2=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}-2=-\frac{5}{2}.$$

【方法 3】 将 $a=0$ 代入 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$ 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^2}-b=2,$$

上式显然不成立，则排除选项(B)(C)，故 $a=1$.

将 $a=1, b=-\frac{5}{2}$ 代入

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{5}{2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\frac{5}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=2.$$

则排除(D). 故应选(A).

【例 36】 (2000，数二) 若 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$ 为

(A)0. (B)6. (C)36. (D)∞.

解

【方法 1】 由泰勒公式 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ 知

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{6x-\frac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)+xf(x)}{x^3}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36,$$

则 $\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$.

【方法 2】 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$$=-36+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2},$$

则 $\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$.

【注】 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=0$，这是一种经典错误.

方法 6　利用夹逼原理求极限

【例 37】 (1995,数三) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解

由于

$$\frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$$

$$\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}$$

$$\frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\to\frac{1}{2}(n\to\infty),$$

$$\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}\to\frac{1}{2}(n\to\infty),$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

【例 38】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$.

解

【方法 1】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=3$

【方法 2】 由于 $\sqrt[n]{3^n}\leqslant\sqrt[n]{1+2^n+3^n}\leqslant\sqrt[n]{3\cdot 3^n}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=3,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot 3^n}=3$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=3$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【例 39】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$,其中 $a_i>0(i=1,2,\cdots,m)$.

解

令 $\max\{a_i\}=a$,则

$$\sqrt[n]{a^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{ma^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m\cdot a^n}=a,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a$.

【注】 这是一个常用结论.

【例 40】 (2008,数四) 设 $0<a<b$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$

(A)a.　　(B)a^{-1}.

(C)b.　　(D)b^{-1}.

解

由于

$$\lim_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n+\left(\frac{1}{b}\right)^n}=\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}=\frac{1}{a},$$

则应选(B).

【例 41】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$,$(x>0)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\max\left\{1,x,\frac{x^2}{2}\right\}=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ x, & 1\leqslant x<2,\\ \dfrac{x^2}{2}, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

方法 7　利用单调有界准则求极限

【例 42】 设 $x_1>0$,$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$,$n=1,2,\cdots$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解

由题设知 $x_n>0$,且

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{x_n})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right]\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_n}}=1,$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n}-x_n\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x_n^2}{x_n}\leqslant 0,$$

或

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right)=1,$$

则数列$\{x_n\}$单调减且下有界,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

等式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$ 两端取极限得

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right),$$

得 $a^2=1$,则 $a=1$,$a=-1$(舍去),故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

方法 8　利用定积分定义求极限（见第五章）

三、无穷小量阶的比较

【例 43】（2005，数二）当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$ _____.

解

【方法 1】　由题设知

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}\\&=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}\qquad\text{（有理化）}\\&=\frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}\\&=\frac{1}{2k}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\\&=\frac{1}{2k}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4k},\end{aligned}$$

则 $k=\frac{3}{4}$.

【方法 2】　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}=\dfrac{1}{k}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}(1-\cos x+x\arcsin x)}{x^2}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2k}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x}{x^2}\right)\\&=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4k},\end{aligned}$$

则 $k=\frac{3}{4}$.

【方法 3】　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x\arcsin x}-1)-(\sqrt{\cos x}-1)}{kx^2}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)-\left(-\frac{1}{4}x^2\right)}{x^2}\qquad(1-\cos^{\alpha}x\sim\frac{\alpha}{2}x^2)\\&=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}x^2}{x^2}=\frac{3}{4k},\end{aligned}$$

则 $k=\frac{3}{4}$.

【例 44】 (2001,数二)设当 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小,则正整数 n 等于

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

解

当 $x\to 0$ 时

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^4,$$

$$x\sin x^n\sim x^{n+1},$$

$$e^{x^2}-1\sim x^2,$$

由题设可知 $2<n+1<4$,则 $n=2$,故选(B).

【例 45】 (2014,数二)当 $x\to 0^+$ 时,若 $\ln^\alpha(1+2x)$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,则 α 的取值范围是

(A)$(2,+\infty)$. (B)$(1,2)$. (C)$\left(\frac{1}{2},1\right)$. (D)$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

解

当 $x\to 0$ 时

$$\ln^\alpha(1+2x)\sim(2x)^\alpha=2^\alpha x^\alpha,$$

$$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}x^{\frac{2}{\alpha}},$$

由题设可知 $\alpha>1$,且 $\frac{2}{\alpha}>1$,则 $1<\alpha<2$,故选(B).

【例 46】 (2016,数二)设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$,$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$,$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$. 当 $x\to 0^+$ 时,以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序是

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. (B)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$. (C)$\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$. (D)$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

解

当 $x\to 0$ 时

$$\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)\sim-\frac{1}{2}x^2,$$

$$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}},$$

$$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1\sim\frac{1}{3}x,$$

则以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序是 α_2、α_3、α_1,故选(B).

【例 47】 (2020,数三)已知 a,b 为常数,若 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n\to\infty$ 时是等价无穷小,求 a,b.

解

【方法 1】 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}$

$=\mathrm{e}\left[\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}-1\right]\sim\mathrm{e}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]\quad(n\to\infty)$

$=n\mathrm{e}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]\sim n\mathrm{e}\left(-\frac{1}{2n^2}\right)=-\frac{\mathrm{e}}{2n}.$

由题设知 $-\frac{\mathrm{e}}{2n}\sim\frac{b}{n^a}$,则 $a=1,b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$.

【方法 2】 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}$

$=\mathrm{e}^{\xi}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$ (拉格朗日中值定理,ξ 在 $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,1 之间)

$\sim\mathrm{e}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right],\quad(n\to\infty).$

以下同解 1.

第三节 函数的连续性

微信公众号: djky66
(顶尖考研祝您上岸)

考试内容概要

一、连续性的概念

定义 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,若

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称 $y=f(x)$ **在点 x_0 处连续**.

定义 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称 $y=f(x)$ **在点 x_0 处连续**.

【注】 以上两个定义是等价的.

定义 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称 $y=f(x)$ **在点 x_0 处左连续**;

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称 $y=f(x)$ **在点 x_0 处右连续**.

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

定义 如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每点都连续,则称 $f(x)$ 在 (a,b) **内连续**. 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续,在 $x=a$ 处右连续,在 $x=b$ 处左连续,则称 $f(x)$ **在 $[a,b]$ 上连续**.

【例 1】 (2017,数一、二、三)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则

(A)$ab=\dfrac{1}{2}$. (B)$ab=-\dfrac{1}{2}$. (C)$ab=0$. (D)$ab=2$.

解

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可知

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{ax}=\frac{1}{2a}=f(b)=b,$$

则 $ab=\dfrac{1}{2}$,故应选(A).

【例 2】 (1994,数三)若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,则 $a=$ _____.

解

显然 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处连续,又

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{2ax}-1}{x}$$

$$=2+2a.$$

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则

$$2+2a=a,$$

故 $a=-2$.

【例 3】 (2008,数三)设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,则 $c=$ _____.

解

显然 $f(x)$ 在 $x\neq\pm c$ 处都连续,又 $f(x)$ 是偶函数,要使 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,只要 $f(x)$ 在 $x=c$ 处连续,又

$$\lim_{x\to c^-}f(x)=\lim_{x\to c^-}(x^2+1)=c^2+1,$$

$$\lim_{x\to c^+}f(x)=\lim_{x\to c^+}\frac{2}{x}=\frac{2}{c},$$

$$f(c)=c^2+1,$$

则 $c^2+1=\frac{2}{c}$，即 $c^3+c=2$.

$$(c-1)(c^2+c+2)=0,$$

解得 $c=1$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

二、间断点及其分类

1. 间断点的定义

定义 若 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有定义，但在 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**间断点**.

2. 间断点的分类

左、右极限都存在的间断点称为**第一类间断点**，其中左、右极限都存在且相等的间断点称为**可去间断点**；左、右极限都存在但不相等的间断点称为**跳跃间断点**.

左、右极限至少有一个不存在的间断点称为**第二类间断点**. 其中若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**无穷间断点**.

函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处没定义，且左、右极限都不存在，这是由于当 $x\to 0$ 时，其函数值在 -1 与 1 之间无穷多次振荡，则称点 $x=0$ 为函数 $\sin\frac{1}{x}$ 的**振荡间断点**.

【例 4】 (2008，数二) 设函数 $f(x)=\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有

(A)1 个可去间断点，1 个跳跃间断点.　　(B)1 个可去间断点，1 个无穷间断点.

(C)2 个跳跃间断点.　　(D)2 个无穷间断点.

解

由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 0}x\ln|x|=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

则 $x=0$ 为可去间断点.

由于

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{|x-1|}=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{|x-1|}$$

$$=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}=\begin{cases}\sin 1, & x\to 1^+,\\ -\sin 1, & x\to 1^-,\end{cases}$$

则 $x=1$ 为跳跃间断点.

故应选(A).

【例 5】 (2020,数三) 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为

(A)1. (B)2.

(C)3. (D)4.

【C】

三、连续性的运算与性质

定理 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $f(x)\pm g(x)$,$f(x)\cdot g(x)$,$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

定理 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续,且 $\varphi(x_0)=u_0$,而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 处也连续.

定理 基本初等函数在其定义域内都是连续的.

定理 初等函数在其定义区间内都是连续的.

【注】 所谓定义区间,是指包含在定义域内的区间.

四、闭区间上连续函数的性质

定理(最值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值与最小值.

定理(有界性定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.

定理(介值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,则对于任意介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的数 C,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=C$.

推论 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取到介于最小值 m 与最大值 M 之间的任何值.

定理(零点定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

【注】 零点定理的一个重要应用就是证明方程的根的存在性.

常考题型与典型例题

常考题型

1. 讨论函数的连续性及间断点的类型
2. 有关闭区间上连续函数性质的证明题

【例 6】 (1997,数二)已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ _____.

解

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{x^2}},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

又 $f(0)=a$,则 $a=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

【例 7】 讨论 $f(x)=\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续性并指出间断点类型.

解

由于 $f(x)=\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ 是初等函数,则除 $x=0,x=1$ 外处处连续.

当 $x=0$ 时,

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{-\frac{x}{1-x}}=-1,$$

则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

当 $x=1$ 时,

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=0,$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=1,$$

则 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【例 8】 函数 $f(x)=\dfrac{(x^2+x)(\ln|x|)\sin\dfrac{1}{x}}{x^2-1}$ 的可去间断点的个数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

解

$f(x)$ 有三个间断点，$x=0, x=\pm 1$. 在 $x=0$ 处，

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\lim_{x\to 0} x\ln|x|\sin\frac{1}{x},$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln|x| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (\text{无穷小量}),$$

则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$，$x=0$ 为可去间断点. 在 $x=-1$ 处，

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{x\ln|x|\sin\frac{1}{x}}{x-1} = 0,$$

则 $x=-1$ 为可去间断点. 在 $x=1$ 处，

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln|x|\sin\frac{1}{x}}{x-1} = \sin 1\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$= \sin 1\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}$$

$$= \sin 1\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1} = \sin 1,$$

则 $x=1$ 为可去间断点.

【例 9】 (1998，数三) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数的间断点，其结论为

(A) 不存在间断点.　　(B) 存在间断点 $x=1$.

(C) 存在间断点 $x=0$.　　(D) 存在间断点 $x=-1$.

解

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1+x, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1,\\ 0, & x=-1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$$

在 $x=-1$ 处，　$f(-1-0)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=0,$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to -1^+}(1+x)=0,$$

$$f(-1-0)=f(-1+0)=f(-1)=0,$$

则 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.

在 $x=1$ 处，　$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x)=2,$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=0,$$

则 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

【例 10】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$a<c<d<b$. 试证对任意的正数 p,q，至少存在一个 $\xi\in[c,d]$，使 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$.

证

由题设可知，$f(x)$ 在$[c,d]$上连续，则该区间上必有最小值 m 和最大值 M. 则

$$m=\frac{pm+qm}{p+q}\leqslant\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leqslant\frac{pM+qM}{p+q}=M.$$

由连续函数介值定理知，至少存在一个 $\xi\in[c,d]$，使

$$f(\xi)=\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q},$$

故

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

第二章　导数与微分

大纲考试内容	大纲考试要求		
	数一	数二	数三
导数的概念及其可导性与连续性之间的关系	理解	理解	理解
基本初等函数的导数公式 导数的四则运算法则 复合函数的求导法则	掌握	掌握	掌握
高阶导数的概念 一阶微分形式的不变性	了解	了解	了解
分段函数的导数 反函数与隐函数的导数 函数的微分 简单函数的高阶导数 平面曲线的切线方程与法线方程	会求	会求	会求
导数判断函数图形的凹凸性	会用	会用	会用
微分的概念、导数与微分之间的关系 导数的几何意义	理解	理解	理解
导数的物理意义 微分的四则运算法则	了解	了解	
由参数方程所确定的函数的导数	会求	会求	

考试内容概要

一、导数与微分的概念

1. 导数的概念

定义(导数)　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ **在点** x_0 **处可导**，并称此极限值为 $f(x)$ **在点** x_0 **处的导数**，记为 $f'(x_0)$，或 $y'\big|_{x=x_0}$，或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$. 如果上述极限不存在，则称 $f(x)$ **在点** x_0 **处不可导**.

【注】 常用的导数定义的等价形式有：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

定义(左导数) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其某个左邻域内有定义，若左极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在时，则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**，记为 $f'_-(x_0)$.

定义(右导数) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其某个右邻域内有定义，若右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在时，则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**右导数**，记为 $f'_+(x_0)$.

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是它在该点处左导数与右导数都存在且相等.

定义(区间上可导及导函数) 如果 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ **在区间** (a,b) **内可导**. 此时对于 (a,b) 内的每一点 x，都对应一个导数值 $f'(x)$，常称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的**导函数**，简称为**导数**. 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ **在区间** $[a,b]$ **上可导**.

【例 1】 (1994，数三) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的

(A) 左、右导数都存在.　　(B) 左导数存在但右导数不存在.

(C) 左导数不存在但右导数存在.　　(D) 左、右导数都不存在.

解

【方法 1】 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=2,$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty,$$

则左导数存在但右导数不存在，故应选(B).

【方法 2】 $f'_-(1)=\left(\frac{2}{3}x^3\right)'\Big|_{x=1}=2x^2|_{x=1}=2,$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}x^2=1,$$

$$f(1)=\frac{2}{3},\lim_{x\to 1^-}f(x)\neq f(1),$$

即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处非右连续，则右导数不存在，故应选(B).

【注】 一种经典错误是：$f'_+(1)=(x^2)'|_{x=1}=2x|_{x=1}=2$. 错误的原因是 $f(1)\neq x^2|_{x=1}$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【例 2】 (1990,数四、五) 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$,且有 $f'(0)=b$,其中 a,b 为非零常数,则

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导. (B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=a$.

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=b$. (D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=ab$.

解

由导数定义知

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{af(\Delta x)-af(0)}{\Delta x} \\ &= a\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} \\ &= af'(0)=ab \end{aligned}$$

故应选(D).

2. 微分的概念

定义 (微分) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),(\Delta x\to 0),$$

其中 A 为不依赖于 Δx 的常数,则称函数 $f(x)$ **在点 x_0 处可微**,称 $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的**微分**,记为 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

定理 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,且有

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x$$

在点 x 处,常记 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

【例 3】 (1988,数一、二、三) 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$,则当 $\Delta x\to 0$ 时,该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是

(A) 与 Δx 等价的无穷小. (B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小. (D) 比 Δx 高阶的无穷小.

【B】

3. 导数与微分的几何意义

导数的几何意义

导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率.

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处必有切线,其切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

如果 $f'(x_0)\neq 0$,则此曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

如果 $f'(x_0)=0$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y=f(x_0)$,即曲线在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有水平切线.

【注】 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有切线,反之则不然.例如曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在点 $(0,0)$ 处有切线 $x=0$(y 轴),但函数 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处不可导($f'(0)=\infty$).

微分的几何意义

微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 的切线上的增量.

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 上的增量.

$\Delta y\approx \mathrm{d}y$.

【例 4】 (2004,数一) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为_____.

解 直线 $x+y=1$ 的斜率为 -1,曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x,\ln x)$ 处切线斜率为

$$k_{切}=(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

由题设知

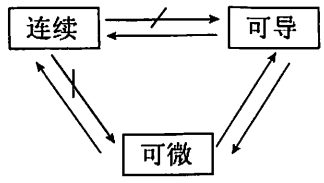
$$\frac{1}{x}=1,$$

则 $x=1$,在该点处切线方程为

$$y-\ln 1=1\cdot(x-1),$$

即 $y=x-1$.

4. 连续、可导、可微之间的关系



【例 5】 (2020,数一) 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有定义,且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

解

【方法 1】 直接法

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导知,$f(x)$ 在该点连续,则

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0,\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0),$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{|x|}}=f'(0)\cdot 0=0$. 故应选(C).

【方法 2】 排除法

令 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 显然有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{|x|}}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=0,$$

但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,则排除选项(A)(B).

若令 $f(x)=x$,显然有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,但

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty\neq 0,$$

则排除(D) 选项,故应选(C).

二、导数公式及求导法则

1. 基本初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$;

(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$;

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$;

(4) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$;

(5) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;

(6) $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$;

(7) $(\sin x)'=\cos x$;

(8) $(\cos x)'=-\sin x$;

(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$;

(10) $(\cot x)'=-\csc^2 x$;

(11)$(\sec x)' = \sec x\tan x$;　　(12)$(\csc x)' = -\csc x\cot x$;

(13)$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(14)$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(15)$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;　　(16)$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. 求导法则

有理运算法则

设 $u = u(x), v = v(x)$ 在 x 处可导,则

(1)$(u \pm v)' = u' \pm v'$;

(2)$(uv)' = u'v + uv'$;

(3)$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$　$(v \neq 0)$.

复合函数求导法

设 $u = \varphi(x)$ 在 x 处可导,$y = f(u)$ 在对应点处可导,则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导,且 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = f'(u)\varphi'(x)$.

【例 6】 (1995,数二) 设 $y = \cos(x^2)\sin^2\dfrac{1}{x}$,则 $y' =$ _____

微信公众号: djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【$-2x\sin(x^2)\cdot\sin^2\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}\cdot\cos(x^2)$】

【例 7】 设函数 $f(x)$ 可导,试证

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f'(x)$ 是偶函数;

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f'(x)$ 是奇函数;

(3) 若 $f(x)$ 是周期函数,则 $f'(x)$ 也是周期函数.

证

(1) 由于 $f(x)$ 是奇函数,则

$$f(-x) = -f(x).$$

由于 $f(x)$ 可导,上式两端对 x 求导得

$$f'(-x)\cdot(-1) = -f'(x),$$

即 $f'(-x) = f'(x)$,故 $f'(x)$ 为偶函数.

同理可证(2)和(3).

【例 8】 (2017,数一) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,则 $f^{(3)}(0)=$ _____.

【0】

隐函数求导法

设 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的可导函数,为求得 y',可在方程 $F(x,y)=0$ 两边对 x 求导,可得到一个含有 y' 的方程,从中解出 y' 即可.

【注】 y' 也可由多元函数微分法中的隐函数求导公式 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$ 得到.

【例 9】 (1993,数三) 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定,则 $\frac{dy}{dx}=$ _____.

【$\frac{y^2-e^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}$】

反函数的导数

若 $y=f(x)$ 在某区间内可导,且 $f'(x)\neq 0$,则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应区间内也可导,且

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)};\text{即}\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

【例 10】 证明 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

参数方程求导法

设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}(\alpha<t<\beta)$ 确定的函数，则

(1) 若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

(2) 若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

【例 11】 (2020，数一) 设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1},\\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}),\end{cases}$ 则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ _____.

【$-\sqrt{2}$】

对数求导法

如果 $y=y(x)$ 的表达式由多个因式的乘除、乘幂构成，或是幂指函数的形式，则可先将函数取对数，然后两边对 x 求导.

【例 12】 (2005，数二) 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy|_{x=\pi}=$ _____.

【$-\pi dx$】

【例 13】 设 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，求 y'.

【$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$】

三、高阶导数

1. 高阶导数的概念

定义(高阶导数) 如果 $y'=f'(x)$ 作为 x 的函数在点 x 可导,则称 y' 的导数为 $y=f(x)$ 的**二阶导数**,记为 y'',或 $f''(x)$,或 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

一般地,函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数为 $y^{(n)}=[f^{(n-1)}(x)]'$,也可记为 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^ny}{dx^n}$.

即 n 阶导数就是 $n-1$ 阶导函数的导数,

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}.$$

【注】 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处 n 阶可导,则在点 x 的某邻域内 $f(x)$ 必定具有一切低于 n 阶的导数.

2. 常用的高阶导数公式

(1) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

(2) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$;

(4) $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$.

【例 14】 设 $y=\sin 3x$,求 $y^{(n)}$.

解 令 $3x=u$,则 $y=\sin u$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot 3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}\cdot\frac{du}{dx}\cdot 3=\frac{d^2y}{du^2}\cdot 3^2$$

$$=\sin\left(u+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 3^2$$

$$=3^2\sin\left(3x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

归纳法可知

$$y^{(n)}=3^n\left(3x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

【例 15】 设 $y=x^2\cos x$，求 $y^{(n)}$.

【$x^2\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+2nx\cos\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)+n(n-1)\cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$】

常考题型与典型例题

常考题型

1. 导数定义
2. 复合函数、隐函数、参数方程求导
3. 高阶导数
4. 导数应用

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

一、导数定义

【例 16】 (1994，数三) 已知 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$ _____.

解

【方法 1】 由 $f'(x_0)=-1$ 知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x}\cdot\frac{-2x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}$$

$$=-2f'(0)+f'(0)$$

$$=-f'(0)=1,$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=1.$

【方法 2】 令 $f(x)=-x$，显然有

$$f'(x_0)=-1,$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-(x_0-2x)+(x_0-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1.$

【例 17】 (2011，数二、三) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

解

【方法 1】 直接法 由题设知 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}$$
$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0).$$

故应选(B).

【方法 2】 排除法

令 $f(x)=x$,显然 $f(0)=0,f'(0)=1$,此时

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^3}{x^3}=-1.$$

由此可知,选项(A)(C)(D) 都不正确,故选(B).

【例 18】 (2013,数一) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=$ _____.

【1】

【例 19】 (2018,数一、二、三) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$.　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C) $f(x)=\cos|x|$.　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

解

由导数定义知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{|x|})^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x},$$

该极限不存在,则 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导,故应选(D).

【例 20】 (1989,数三) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)-f(a)\right]$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

【D】

二、复合函数、隐函数、参数方程求导

【例 21】 (1993,数三) 设 $y=\sin[f(x^2)]$,其中 f 具有二阶导数,求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【$2f'(x^2)\cos[f(x^2)]+4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)]-[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}$】

【例 22】 (2012,数二) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数,则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ _____.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【1】

【例 23】 (2013,数一) 设 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t,\end{cases}$ (t 为参数),则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ _____.

【$\sqrt{2}$】

三、高阶导数

【例 24】 (2007,数二、三) 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$,则 $y^{(n)}(0)=$ _____.

解

【方法 1】 归纳法

$$y=\frac{1}{2x+3}=(2x+3)^{-1},$$

$$y'=(-1)(2x+3)^{-2}\cdot 2,$$

$$y''=(-1)(-2)(2x+3)^{-3}\cdot 2^2,$$

由此归纳得

$$y^{(n)}=(-1)(-2)\cdots(-n)(2x+3)^{-(n+1)}\cdot 2^n$$

$$=(-1)^n n!2^n(2x+3)^{-(n+1)},$$

$$y^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}.$$

【方法 2】 泰勒公式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n),$$

$$y=\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}x}$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-\frac{2}{3}x+\cdots+(-1)^n\left(\frac{2}{3}x\right)^n\right]+o(x^n)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}x+\cdots+\frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}x^n+o(x^n),$$

则 $\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}$, $y^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$.

【例 25】 (2015,数二) 函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$ _____.

解

【方法 1】 公式法

令 $u=x^2, v=2^x$,由公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)},$$

而 $u(0)=0, u'(0)=0, u''(0)=2, u'''(0)=0$,则 $f^{(n)}(0)=C_n^2 u''(0)v^{n-2}(0)$.

$$v=2^x, v'=2^x\ln 2, v''=2^x(\ln 2)^2,$$

$$v^{(n-2)}=2^x(\ln 2)^{n-2},$$

$$v^{(n-2)}(0)=(\ln 2)^{n-2}.$$

$$f^{(n)}(0)=\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2\cdot(\ln 2)^{n-2}$$

$$=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}.$$

【方法 2】 泰勒公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{21}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

$$f(x)=x^2 2^x=x^2 e^{x\ln 2}$$

$$=x^2\left(1+x\ln 2+\frac{(\ln 2)^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{(\ln 2)^n}{n!}x^n+o(x^n)\right)$$

$$=x^2+x^3\ln 2+\frac{(\ln 2)^2}{2!}x^4+\cdots+\frac{(\ln 2)^n}{n!}x^{n+2}+o(x^{n+2}),$$

则 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}$，$f^{(n)}(0)=\frac{n!(\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$.

四、导数应用

1. 导数的几何意义

【例 26】 (2011，数三) 曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=e^y$ 在点(0,0) 处的切线方程为_____.

【$y=-2x$】

【例 27】 (2013，数二) 曲线 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为_____.

【$x+y=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$】

【例 28】 (1997,数一)对数螺线 $r=e^{\theta}$ 在点 $(r,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为_____.

【$x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$】

2. 相关变化率(数三不要求)

【例 29】 (2016,数二)已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动,记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0,则当点 P 运动到点(1,1)时,l 对时间的变化率是_____.

解

由题设知

$$l=\sqrt{x^2+x^6},$$

则 $l^2=x^2+x^6$.

上式两端对 t 求导得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=(2x+6x^5)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

令 $x=1$,则 $2\sqrt{2}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=8v$.

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{8}{2\sqrt{2}}v_0=2\sqrt{2}v_0.$$

第三章　微分中值定理及导数应用

大纲考试内容	大纲考试要求		
	数一	数二	数三
罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理 泰勒(Taylor)定理	理解并会用	理解并会用	理解并会用
柯西(Cauchy)中值定理	了解并会用	了解并会用	了解并会用
函数图形的拐点	会求	会求	会求
导数判断函数图形的凹凸性	会用	会用	会用
用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法 函数的最大值和最小值的求法及其应用	掌握	掌握	掌握
函数的极值概念	理解	理解	理解
洛必达法则求未定式极限的方法	掌握	掌握	掌握
曲率、曲率圆和曲率半径的概念	了解	了解	
曲率和曲率半径	会计算	会计算	
函数图形的水平、铅直和斜渐近线	会求	会求	会求
导数的经济意义(含边际与弹性的概念)			了解
导数描述一些物理量	会用	会用	
函数的图形	会描绘	会描绘	会描绘

考试内容概要

一、微分中值定理

定理（费马引理）　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值，

那么 $f'(x_0)=0$.

定理（罗尔定理） 如果 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续，

(2) 在开区间(a,b)内可导，

(3)$f(a)=f(b)$，

则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

定理（拉格朗日中值定理） 如果 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续，

(2) 在开区间(a,b)内可导，

则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

推论 如果在(a,b)内恒有 $f'(x)=0$，则在(a,b)内 $f(x)$ 为常数.

定理（柯西中值定理） 如果 $f(x),F(x)$ 满足以下条件：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续，

(2) 在开区间(a,b)内可导，且 $F'(x)$ 在(a,b)内每一点处均不为零，

则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

定理（皮亚诺型余项泰勒公式）

如果 $f(x)$ 在点 x_0 有直至 n 阶的导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n],$$

常称 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ 为**皮亚诺型余项**. 若 $x_0=0$，则得**麦克劳林公式**：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n).$$

定理（拉格朗日型余项泰勒公式）

设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间(a,b)内有 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，这里 ξ 介于 x_0 与 x 之间，称为**拉格朗日型余项**.

几个常用的泰勒公式（拉格朗日型余项）

(1)$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$；

(2)$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\dfrac{\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$；

(3)$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\dfrac{\cos(\theta x)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$；

$$(4)\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}};$$

$$(5)(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

(以上 θ 满足 $\theta\in(0,1)$)

二、导数应用

1. 函数的单调性

定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导.

(1) 若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增;

(2) 若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减.

2. 函数的极值

定义 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义.如果对于该邻域内任何 x,恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ 或($f(x)\geqslant f(x_0)$),则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极大值点**(或**极小值点**),称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**极大值**(或**极小值**).极大(小)值统称为**极值**;极大(小)值点统称为**极值点**.导数为零的点称为函数的**驻点**.

定理(**极值的必要条件**) 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,如果 x_0 为 $f(x)$ 的极值点,则 $f'(x_0)=0$.

定理(**极值的第一充分条件**) 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内可导,且 $f'(x_0)=0$(或 $f(x)$ 在 x_0 处连续).

(1) 若 $x<x_0$ 时,$f'(x)>0$,$x>x_0$ 时,$f'(x)<0$,则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点;

(2) 若 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$,$x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点;

(3) 若 $f'(x)$ 在 x_0 的两侧同号,则 x_0 不为 $f(x)$ 的极值点.

定理(**极值的第二充分条件**) 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导,且 $f'(x_0)=0$.

(1) 若 $f''(x_0)<0$,则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点;

(2) 若 $f''(x_0)>0$,则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点;

(3) 若 $f''(x_0)=0$,则此方法不能判定 x_0 是否为极值点.

3. 函数的最大值与最小值

定义 设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义,$x_0\in[a,b]$.若对于任意 $x\in[a,b]$,恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$(或 $f(x)\geqslant f(x_0)$),则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的**最大值**(或**最小值**),称 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**最大值点**(或**最小值点**).

函数的最值主要有以下两种问题:

(1) 连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大最小值

第一步：求出 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的驻点和不可导的点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$；

第二步：求出 $f(x)$ 在点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和区间端点 a,b 处的函数值

$$f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),f(a),f(b);$$

第三步：比较以上各点函数值，其中最大的即为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，最小的即为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

【注】 当连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内仅有唯一极值点，若在该点 $f(x)$ 取极大值(或极小值)，则它也是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值(或最小值).

(2) 最大最小值的应用题

这种问题首先建立目标函数并确定其定义域，然后按照以上三步求其最大值(或最小值).

4. 曲线的凹凸性

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1,x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的；如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的.

定理 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，那么

(1) 若在 (a,b) 内有 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

(2) 若在 (a,b) 内有 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

定义（拐点） 连续曲线弧上的凹与凸的分界点称为曲线弧的**拐点**.

定理（拐点的必要条件） 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导，且点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$.

定理（拐点的第一充分条件） 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内二阶可导，且 $f''(x_0)=0$(或 $f(x)$ 在 x_0 处连续).

(1) 若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧异号，则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

(2) 若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧同号，则点 $(x_0,f(x_0))$ 不为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

定理（拐点的第二充分条件） 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处三阶可导，且 $f''(x_0)=0$.

(1) 若 $f'''(x_0)\neq 0$，则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

(2) 若 $f'''(x_0)=0$，则此方法不能判定 $(x_0,f(x_0))$ 是否为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

5. 曲线的渐近线

定义 若点 M 沿曲线 $y=f(x)$ 无限远离原点时，它与某条定直线 L 之间的距离将趋近于零，则称直线 L 为曲线 $y=f(x)$ 的一条**渐近线**. 若直线 L 与 x 轴平行，则称 L 为曲线 $y=f(x)$ 的**水平渐近线**；若直线 L 与 x 轴垂直，则称 L 为曲线 $y=f(x)$ 的**垂直渐近线**；若直线 L 既不平行于 x 轴，也不垂直于 x 轴，则称直线 L 为曲线 $y=f(x)$ 的**斜渐近线**.

水平渐近线

若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,或$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$),那么$y=A$是曲线$y=f(x)$的水平渐近线.

垂直渐近线

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$,或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$),那么$x=x_0$是曲线$y=f(x)$的垂直渐近线.

斜渐近线

若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$且$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$(或$x\to-\infty$,或$x\to+\infty$),那么$y=ax+b$是曲线$y=f(x)$的斜渐近线.

6. 函数的作图

利用函数的单调性、极值、曲线的凹凸性、拐点及渐近线可以做出函数曲线.

7. 曲线的弧微分与曲率(数三不要求)

定义 设$y=f(x)$在(a,b)内有连续导数,则有**弧微分**

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

定义 设$y=f(x)$有二阶导数,则有**曲率**

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

称$\rho=\dfrac{1}{K}$为**曲率半径**.

定义 若曲线$y=f(x)$在点$M(x,y)$处的曲率为$K(K\neq0)$.在点M处曲线的法线上,在曲线凹的一侧取一点D,使$|DM|=\dfrac{1}{K}=\rho$,以D为圆心,ρ为半径的圆称为曲线在点M处的**曲率圆**,圆心D称为曲线在点M处的**曲率中心**.

8. 导数在经济学中的应用(仅数三要求)

经济学中常见的函数

(1) **需求函数**:$x=\varphi(p)$;其中x为某产品的需求量,p为价格.

需求函数的反函数$p=\varphi^{-1}(x)$称为**价格函数**.

(2) **供给函数**:$x=\psi(p)$;其中x为某产品的供给量,p为价格.

(3) **成本函数**:成本$C=C(x)$是生产产品的总投入,它由固定成本C_1(常量)和可变成本$C_2(x)$两部分组成,其中x表示产量,即

$$C=C(x)=C_1+C_2(x),$$

称$\dfrac{C}{x}$为**平均成本**,记为$\overline{C}$或AC,

$$AC = \overline{C} = \frac{C}{x} = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2(x)}{x}.$$

(4) **收益(入)函数**:收益 $R = R(x)$ 是产品售出后所得的收入,是销售量 x 与销售单价 p 之积,即收益函数为

$$R = R(x) = px.$$

(5) **利润函数**:利润 $L = L(x)$ 是收益扣除成本后的余额,由总收益减去总成本组成,即利润函数为

$$L = L(x) = R(x) - C(x) \quad (x \text{ 是销售量}).$$

边际函数与边际分析

(1) **边际函数的有关概念** 设 $y = f(x)$ 可导,则在经济学中称 $f'(x)$ 为边际函数,$f'(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的边际值.

(2) **经济学中常用的边际分析**

① **边际成本**:设成本函数为 $C = C(q)$(q 是产量),则边际成本函数 MC 为 $MC = C'(q)$;

② **边际收益**:设收益函数为 $R = R(q)$(q 是产量),则边际收益函数 MR 为 $MR = R'(q)$;

③ **边际利润**:设利润函数为 $L = L(q)$(q 是销售量),则边际利润函数 ML 为 $ML = L'(q)$.

弹性函数与弹性分析

(1) **弹性函数的有关概念** 设 $y = f(x)$ 可导,则称 $\frac{\Delta y / y}{\Delta x / x}$ 为函数 $f(x)$ 当 x 从 x 变到 $x + \Delta x$ 时的相对弹性,称

$$\eta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = f'(x) \frac{x}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} x$$

为函数 $f(x)$ 的弹性函数,记为 $\frac{Ey}{Ex}$,即

$$\eta = \frac{Ey}{Ex} = f'(x) \frac{x}{f(x)}.$$

它在经济学上解释为函数 $f(x)$ 在 x 处的相对变化率.

(2) **经济学中常用的弹性分析**

① **需求的价格弹性**:设需求函数 $Q = \varphi(p)$(p 为价格),则需求对价格的弹性为 $\eta_d = \frac{p}{\varphi(p)} \varphi'(p)$. 由于 $\varphi(p)$ 是单调减少函数,故 $\varphi'(p) < 0$,从而 $\eta_d < 0$.

经济学中的解释为:当价格为 p 时,若提价(或降价)1%,则需求量将减少(或增加)$|\eta_d|$%.

需要注意的是,很多试题中规定需求对价格的弹性 $\eta_d > 0$,此时应该有公式

$$\eta_d = -\frac{p}{\varphi(p)} \varphi'(p).$$

② **供给的价格弹性**:设供给函数 $Q = \psi(p)$(p 为价格),则供给对价格的弹性为 $\eta_s = \frac{p}{\psi(p)} \psi'(p)$. 由于供给函数 $\psi(p)$ 单调增加,故 $\psi'(p) > 0$,从而 $\eta_s > 0$.

经济学中的解释为:当价格为 p 时,若提价(或降价)1%,则供给量将增加(或减少)η_s%.

【例 1】 (2014) 设某商品的需求函数为 $Q=40-2p$ (p 为商品的价格),则该商品的边际收益为_____.

解

由题设知收益函数为

$$R=pQ=\frac{40-Q}{2}\cdot Q,$$

则边际收益为

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=20-Q.$$

【注】 一种典型的错误是填 $40-4p$. 边际收益是"当商品的需求量在 Q 的基础上再增加一件所获得的收益",所以边际收益为 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$. 部分考生错误地将 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}$ 当作边际收益.

【例 2】 (2017) 设生产某产品的平均成本 $\overline{C}(Q)=1+\mathrm{e}^{-Q}$,其中产量为 Q,则边际成本为_____.

解

成本

$$C(Q)=\overline{C}(Q)Q=Q(1+\mathrm{e}^{-Q}),$$

边际成本为

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q}=(1+\mathrm{e}^{-Q})-Q\mathrm{e}^{-Q}=1+(1-Q)\mathrm{e}^{-Q}.$$

【例 3】 (2009) 设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$,其对价格 p 的弹性 $\varepsilon_p=0.2$,则当需求量为 10000 件时,价格增加 1 元会使产品收益增加_____元.

解

由题设知

$$-\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=\varepsilon_p=0.2,$$

收益函数

$$R=Qp,$$

收益微分为

$$\mathrm{d}R=p\mathrm{d}Q+Q\mathrm{d}p=Q\left(1+\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\right)\mathrm{d}p=Q(1-\varepsilon_p)\mathrm{d}p.$$

当 $Q=10000,\mathrm{d}p=1$ 时,产品的收益增加

$$\mathrm{d}R=10000\times(1-0.2)\times1=8000(\text{元}).$$

【注】 一种典型的错误是 $\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=0.2$,导致得出错误的结果 12000.

【例 4】 (2010) 设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$ _____.

解

由题意知 $\frac{p}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=1+p^3$，即 $\frac{\mathrm{d}R}{R}=\left(\frac{1}{p}+p^2\right)\mathrm{d}p$，两边同时积分，得

$$\ln R=\ln p+\frac{1}{3}p^3+C.$$

从而有 $R(p)=p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}p^3+C}$，将 $R(1)=1$ 代入上式解得 $C=-\frac{1}{3}$，故 $R(p)=p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$.

常考题型与典型例题

常考题型

1. 求函数的极值和最值，确定曲线的凹向和拐点
2. 求渐近线
3. 方程的根
4. 不等式的证明
5. 中值定理证明题

一、求函数的极值和最值及确定曲线的凹向和拐点

【例 5】 (2003，数一、二) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图 1 所示，则 $f(x)$ 有

(A) 一个极小值点和两个极大值点.

(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.

(D) 三个极小值点和一个极大值点.

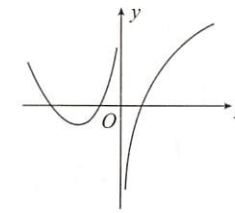


图 1

【C】

【例 6】 (1990,数一) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且 $f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

(A) 不可导.

(B) 可导,且 $f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值.

(D) 取得极小值.

解

【方法 1】 直接法

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$ 及极限的保号性知在 $x=0$ 某去心邻域内

$$\frac{f(x)}{1-\cos x}>0.$$

又 $1-\cos x>0$,则 $f(x)>0=f(0)$,由极值定义知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值,则应选(D).

【方法 2】 排除法

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=2$,则取 $f(x)=x^2$ 显然满足题设条件.

但 $f(x)=x^2$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=0$,取极小值,则排除选项(A)(B)(C).

故应选(D).

【例 7】 在半径为 R 的球中内接一直圆锥,试求圆锥的最大体积.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【$\dfrac{32}{81}\pi R^3$】

【例 8】 (2018,数二、三) 曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是_____.

解

$y'=2x+\dfrac{2}{x}$,$y''=2-\dfrac{2}{x^2}$,令 $y''=0$ 得

$$x=1,x=-1(\text{舍去}).$$

拐点为(1,1). 又 $f'(1)=2+2=4$,则拐点处的切线方程是为

$$y-1=4(x-1),$$

即 $y=4x-3$.

【例 9】 (2004,数二、三) 设 $f(x)=|x(1-x)|$,则

(A)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但$(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解

【方法 1】 在 $x=0$ 的邻域($|x|<\delta$) 内

$$f(x)=\begin{cases}-x(1-x), & x<0,\\ x(1-x), & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-1+2x, & x<0,\\ 1-2x, & x>0.\end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,$f'(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内由负变正,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值.

$$f''(x)=\begin{cases}2, & x<0,\\ -2, & x>0.\end{cases}$$

由于 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的两侧变号,$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

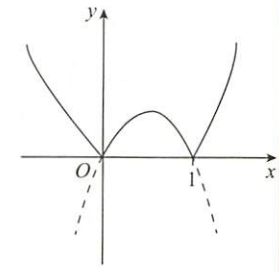


图 2

【方法 2】 如图 2,先画曲线 $y=x(1-x)$(开口朝下抛物线),再画 $f(x)=|x(1-x)|$(把曲线 $y=x(1-x)$ 在 x 轴下方的图形对称地翻上去),由图可知,$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

二、求渐近线

【例 10】 (2014,数一、二) 下列曲线中有渐近线的是

(A)$y=x+\sin x$.　　(B)$y=x^2+\sin x$.

(C)$y=x+\sin\dfrac{1}{x}$.　　(D)$y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$.

解

由渐近线定义可知,若

$$f(x)=ax+b+\alpha(x),$$

其中 $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$,则直线 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

由此可知,曲线

$$y=x+\sin\frac{1}{x}$$

有斜渐近线 $y=x$,因为这里 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$,故应选(C).

【例 11】 (2007,数一、二) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^{x})$ 渐近线的条数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

【D】

【例 12】 (2017,数二) 曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为_____.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【$y=x+2$】

三、方程的根

【例 13】 (1992,数五) 求证:方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根,其中 p,q 为常数,且 $0<q<1$.

证

令 $f(x)=x+p+q\cos x$,则

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

则必存在 $a<0,b>0$,使

$$f(a)<0,f(b)>0.$$

又 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,由连续函数零点定理知,$f(x)$ 在 (a,b) 上至少有一个零点,即方程 $x+p+q\cos x=0$ 在 (a,b) 内至少有一实根. 又

$$f'(x)=1-q\sin x>0,$$

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上最多有一个零点,即方程

$$x+p+q\cos x=0$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上最多有一个实根. 原题得证.

【例 14】 设 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$,求证:方程 $na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

四、不等式的证明

【例 15】 证明：$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,(x>0)$.

证

由拉格朗日中值定理可知

$$\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln 1$$

$$=\frac{(1+x)-1}{\xi}=\frac{x}{\xi},1<\xi<1+x,$$

则 $\frac{x}{1+x}<\frac{x}{\xi}<x$，即 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

【例 16】 (1991，数三) 利用导数证明：当 $x>1$ 时，$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$.

【例 17】 (2012，数一、二、三) 证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

证

令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-\frac{x^2}{2}-1(-1<x<1)$，显然 $f(x)$ 是偶函数，所以是要证 $f(x)\geqslant 0(0\leqslant x<1)$.

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$$

$$\geqslant 2x-\sin x-x=x-\sin x\geqslant 0,$$

则 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调增，又 $f(0)=0$，则 $f(x)\geqslant 0(0\leqslant x<1)$.

五、中值定理证明题

【例 18】 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=f(c)(a<c<b)$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$.

证

由题设条件及罗尔定理知，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使

$$f'(\xi_1)=0,f'(\xi_2)=0.$$

在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对 $f'(x)$ 用罗尔定理得，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使

$$f''(\xi)=0.$$

原题得证.

【例 19】 (1990,数一、二)设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)$,证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)>0$.

【例 20】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,$f(a)=f(b)=0$,且存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)<0$. 试证:$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$,$f'(\xi)<0$,$f''(\eta)>0$.

【例 21】 (2013,数三)设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,且 $f(0)=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. 证明:

(1) 存在 $a>0$,使得 $f(a)=1$;

(2) 对(1)中的 a,存在 $\xi\in(0,a)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

证

(1) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ 可知,存在 $A>0$,使

$$f(A)>1.$$

由题设可知 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上连续,又

$$0=f(0)<1<f(A).$$

由连续函数介值定理知,存在 $a\in(0,A)$,使 $f(a)=1$.

(2) $\dfrac{1}{a}=\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}$,由拉格朗日中值定理知,存在 $\xi\in(0,a)$,使

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\xi),$$

即 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

或者,要证 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$,只要证 $f'(\xi)-\dfrac{1}{a}=0$,因此,令 $F(x)=f(x)-\dfrac{x}{a}$,则

$$F(0)=f(0)=0,F(a)=f(a)-1=0,$$

即 $F(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上满足罗尔定理条件,则存在 $\xi\in(0,a)$,使

$$F'(\xi)=0,$$

即 $f'(\xi)-\dfrac{1}{a}=0$.

原题得证.

第四章　不定积分

大纲考试内容	大纲考试要求		
	数一	数二	数三
原函数与不定积分的概念	理解	理解	理解
不定积分的基本性质和基本积分公式 换元积分法与分部积分法	掌握	掌握	掌握
有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分	会求	会求	

考试内容概要

一、不定积分的概念与性质

1. 原函数

定义　设 $f(x)$ 在某区间 (a,b) 内有定义. 若存在函数 $F(x)$，使其在该区间内任一点都有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间内的**原函数**.

若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在某区间内的原函数，则 $F(x)+C$（C 为任意常数）也为 $f(x)$ 在该区间内的原函数.

若 $F(x),G(x)$ 都是 $f(x)$ 在某区间内的原函数，则 $F(x)-G(x)=C$（C 为某个确定常数）.

2. 不定积分

定义　$f(x)$ 的原函数的全体称为 $f(x)$ 的**不定积分**，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,\text{其中 } C \text{ 为任意常数.}$$

3. 不定积分的几何意义

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则从几何上看，$F(x)$ 表示平面上的一条曲线，称为

$f(x)$ 的积分曲线. 因此,不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$在几何上表示一簇积分曲线. 这簇积分曲线对应于横坐标 x 处的切线都相互平行.

4. 原函数存在定理

定理 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续,则 $f(x)$ 在区间 I 上一定存在原函数.

定理 若 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点,则 $f(x)$ 在区间 I 上没有原函数.

【例 1】 下列函数在给定区间上是否有原函数?

$$(1) f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

$$(2) g(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0. \end{cases}$$

$$(3) h(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

解 (1) 由于 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有原函数.

(2) 由于 $g(x)$ 在 $x=0$ 处有跳跃间断点(第一类间断点),$g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上没有原函数.

事实上,若 $F(x)$ 是 $g(x)$ 的原函数,则

$$F(x)=\begin{cases} -x+C_1, & x<0,\\ x+C_2, & x>0. \end{cases}$$

由 $F(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性知 $C_1=C_2=C$,

$$F(x)=\begin{cases} -x+C, & x<0,\\ x+C, & x\geqslant 0 \end{cases}=|x|+C,$$

但以上 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,则 $g(x)$ 没有原函数.

(3) 易验证 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0 \end{cases}$是$h(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0 \end{cases}$的原函数,即 $F'(x)=h(x)$.

【注】 $h(x)$ 在 $x=0$ 处不连续(第二类间断点),但 $h(x)$ 有原函数 $F(x)$.

5. 不定积分的性质

(1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$, $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$, $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$;

(3)$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$;

(4)$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$($k$ 为常数).

二、不定积分基本公式

(1)$\int 0\mathrm{d}x=C$;　　(2)$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1)$;

(3)$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$;　　(4)$\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C\quad(a>0,a\neq1)$;

(5)$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$;　　(6)$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$;

(7)$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$;　　(8)$\int\sec^{2}x\mathrm{d}x=\tan x+C$;

(9)$\int\csc^{2}x\mathrm{d}x=-\cot x+C$;　　(10)$\int\sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$;

(11)$\int\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$;　　(12)$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$;

(13)$\int\frac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\arctan x+C$;　　(14)$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$;

(15)$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^{2}+x^{2}}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$;　　(16)$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$;

(17)$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}}=\ln(x+\sqrt{x^{2}+a^{2}})+C$;　(18)$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}=\ln|x+\sqrt{x^{2}-a^{2}}|+C$;

(19)$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$;　(20)$\int\csc x\mathrm{d}x=-\ln|\csc x+\cot x|+C$.

【例 2】　求下列不定积分

(1)$\int\frac{(x+1)^{3}}{x^{2}}\mathrm{d}x$;　　(2)$\int\frac{x^{4}-x^{2}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$;　　(3)$\int\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

解

(1)$\int\frac{(x+1)^{3}}{x^{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x^{3}+3x^{2}+3x+1}{x^{2}}\mathrm{d}x=\int\left(x+3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^{2}}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^{2}+3x+3\ln|x|-\frac{1}{x}+C$.

(2)$\int\frac{x^{4}-x^{2}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^{4}-1)-(1+x^{2})+2}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\int\left(x^{2}-1-1+\frac{2}{1+x^{2}}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}x^{3}-2x+2\arctan x+C$.

(3)$\int\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{(1-\sin x)^{2}}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\int(\sec^{2}x-2\sec x\cdot\tan x+\tan^{2}x)\mathrm{d}x$

$=\tan x-2\sec x+\tan x-x+C$

$=2\tan x-2\sec x-x+C$.

三、三种主要积分法

1. 第一换元积分法

定理 设$\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$，$u = \varphi(x)$ 存在连续导数，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$$

常见的凑微分形式

(1)$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$；

(2)$\int x^m f(ax^{m+1}+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{(m+1)a}\int f(ax^{m+1}+b)\mathrm{d}(ax^{m+1}+b)\quad (m\neq -1)$；

(3)$\int f(\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$；

(4)$\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$；

(5)$\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$；

(6)$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$；

(7)$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$；

(8)$\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$；

(9)$\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$；

(10)$\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$.

【例 3】 求下列不定积分

(1)$\int \sec^4 x\mathrm{d}x$；　　(2)$\int \frac{(\ln x+2)^2}{x}\mathrm{d}x$；

(3)$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$；　　(4)$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

解

(1)$\int \sec^4 x\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}\tan x = \int(\tan^2 x+1)\mathrm{d}\tan x$

$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$；

(2)$\int \frac{(\ln x+2)^2}{x}\mathrm{d}x = \int (\ln x+2)^2\mathrm{d}(\ln x+2) = \frac{1}{3}(\ln x+2)^3 + C$；

$$(3)\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{x}=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$=2\int\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\arctan\sqrt{x}=(\arctan\sqrt{x})^2+C;$$

$$(4)\int\frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{(1-x)+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(3+2x-x^2)}{\sqrt{3+2x-x^2}}+\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

$$=\sqrt{3+2x-x^2}+\arcsin\frac{x-1}{2}+C.$$

【例 4】 (1993,数三)$\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x=$_____.

【$\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$】

【例 5】 (1997,数二)计算积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=$_____.

【$\arcsin\frac{x-2}{2}+C$】

2. 第二换元积分法

定理 设 $x=\varphi(t)$ 是单调的、可导的函数,并且 $\varphi'(t)\neq 0$. 又

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C,$$

则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F[\varphi^{-1}(x)]+C,$$

其中 $\varphi^{-1}(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

常用的三种变量代换

(1) 被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$(或 $a\cos t$).

(2) 被积函数含有 $\sqrt{a^2+x^2}$，令 $x=a\tan t$.

(3) 被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t$.

【例 6】 求下列不定积分，其中 $a>0$.

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \sqrt{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解

(1) 令 $x=a\sin t$，

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

(2) 令 $x=a\tan t$，

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int \frac{a\sec t}{a^2\tan^2 t}\cdot a\sec^2 t\mathrm{d}t=\int \frac{1}{\sin^2 t\cos t}\mathrm{d}t=\int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\int \sec t\mathrm{d}t+\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|-\frac{1}{\sin t}+C$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.$$

或 $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int \frac{x^2+a^2}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\int \frac{a^2\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left[1+\left(\frac{a}{x}\right)^2\right]}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}+C$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.$$

(3) 令 $x=a\sec t$,

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{a\tan t}{a\sec t}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t=a\int\tan^2 t\mathrm{d}t$$

$$=a\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t=a(\tan t-t)+C$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$$

(4) 令 $t=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$,则 $x=\ln(t^2-1)$,

$$\int\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{2t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t=2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=2\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}+C.$$

3. 分部积分法

(1) 分部积分公式

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$$

(2) 分部积分法所适用的函数类

分部积分法比较适用于两类不同函数相乘. 如下列积分,这里 $p_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式.

$$\int p_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x,\quad\int p_n(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x,\quad\int p_n(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x,\quad\int\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x,$$

$$\int\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x,\quad\int p_n(x)\ln x\mathrm{d}x,\quad\int p_n(x)\arctan x\mathrm{d}x,\quad\int p_n(x)\arcsin x\mathrm{d}x.$$

(3) 分部积分法中 u,v 的选取

分部积分法在使用时的关键是 u,v 的选取,换句话说就是把谁凑到微分号里去.

①$\int p_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x$,$\int p_n(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x$,$\int p_n(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x$,这三种积分都应把多项式以外的函数凑进微分号.

②$\int\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x$,$\int\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x$,这两种积分把指数函数或三角函数凑进微分号都可以,但把指数凑进去更简单,连续两次将指数函数凑进去分部积分还原便可求解.

③$\int p_n(x)\ln x\mathrm{d}x$,$\int p_n(x)\arctan x\mathrm{d}x$,$\int p_n(x)\arcsin x\mathrm{d}x$,这三种积分都应把多项式函数凑进微分号.

【例 7】 求下列不定积分

(1)$\int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$;　(2)$\int x^2\sin x\mathrm{d}x$;　(3)$\int x\ln x\mathrm{d}x$;　(4)$\int\mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

【例 8】 (1990,数三) 计算$\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{1-x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)} = \frac{\ln x}{1-x} - \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\ln x}{1-x} + \ln\frac{|1-x|}{x} + C.$$

【例 9】 (1998,数二)$\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x =$ _____.

解

$$\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int \ln \sin x \mathrm{d}\cot x = -\cot x \cdot \ln \sin x + \int \cot^2 x\mathrm{d}x$$

$$= -\cot x \cdot \ln \sin x + \int(\csc^2 x - 1)\mathrm{d}x$$

$$= -\cot x \cdot \ln \sin x - \cot x - x + C.$$

四、三类常见可积函数积分

有理函数积分 $\int R(x)\mathrm{d}x$

(1) 一般方法(部分分式法)

(2) 特殊方法(加项减项拆或凑微分降幂)

【例 10】 (1999,数二)$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x =$ _____.

解

$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + 8\int \frac{\mathrm{d}(x-3)}{(x-3)^2+2^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + 4\arctan\frac{x-3}{2} + C.$$

【例 11】 (1987,数五) 求不定积分$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+5}$.

解

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+5} = \int \frac{x\mathrm{d}x}{4+(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{4+(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\arctan\frac{x^2+1}{2} + C.$$

【例 12】 (2019,数二) 求不定积分$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

解

令$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$,则

$$3x+6=A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Dx+E)(x-1)^2$$

$$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x=\int \frac{-2}{x-1}\mathrm{d}x+\int \frac{3}{(x-1)^2}\mathrm{d}x+\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C.$$

三角有理式积分 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$

(1) 一般方法(万能代换) 令$\tan\frac{x}{2}=t$,

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

(2) 特殊方法 (三角变形,换元,分部)

几种常用的换元法

① 若$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$,则令$u=\cos x$,或凑$\mathrm{d}\cos x$.

② 若$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$,则令$u=\sin x$,或凑$\mathrm{d}\sin x$.

③ 若$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$,则令$u=\tan x$,或凑$\mathrm{d}\tan x$.

【例 13】 (1996,数三) 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

解

【方法 1】 原式$=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$.

【方法 2】 令$\tan\frac{x}{2}=t$,则

$$\text{原式}=\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$$

$$=-\frac{2}{1+t}+C=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

【例 14】 (1994,数一、二、三) 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(2x)+2\sin x}$.

解

$$\text{原式}=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)}=\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{2(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}$$

$$\xlongequal{\cos x=u}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)(1+u)}=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{8}\left(\ln\frac{1-u}{1+u}+\frac{2}{1+u}\right)+C$$

$$=\frac{1}{8}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{4(1+\cos x)}+C.$$

【例 15】 计算$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x(1+\sin x)}$.

【例 16】 计算$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x(\sin x+\cos x)}$.

简单无理函数积分 $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$

令$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$,将其化为有理函数积分进行计算.

【例 17】 计算$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x$.

解

【方法 1】 令$\sqrt{\frac{x+1}{x}}=t$,则$x=\frac{1}{t^2-1}$,$\mathrm{d}x=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$,

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x=\int(t^2-1)t\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-2\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C$$

$$=-2\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\ln\left|2x+1-2x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right|+C.$$

【方法 2】 分子有理化.

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x\sqrt{x^2+x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|-\int\frac{\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|-2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+C.$$

常考题型与典型例题

常考题型

求不定积分(换元、分部)

【例 18】 计算积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=$_____.

解

【方法 1】 令$\sqrt{1-x}=t$,则$x=1-t^2$,$\mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$,

$$\text{原式}=\int\frac{-2t}{(1+t^2)t}\mathrm{d}t=-2\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-2\arctan t+C$$

$$=-2\arctan\sqrt{1-x}+C.$$

【方法 2】 $$\text{原式}=-2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x}}{2-x}=-2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x}}{1+(\sqrt{1-x})^2}$$

$$=-2\arctan\sqrt{1-x}+C.$$

【例 19】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\geqslant 0,\\ \cos x, & x<0,\end{cases}$ 则 $\int f(x)\mathrm{d}x=$ _____.

解

【方法 1】 $\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}e^x+C_1, & x\geqslant 0,\\ \sin x+C_2, & x<0.\end{cases}$ 由于原函数必连续，又

$$\lim_{x\to 0^+}(e^x+C_1)=1+C_1,\ \lim_{x\to 0^-}(\sin x+C_2)=C_2,$$

则 $1+C_1=C_2$. 令 $C_1=C$，则 $C_2=1+C$，

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}e^x+C, & x\geqslant 0,\\ \sin x+1+C, & x<0.\end{cases}$$

【方法 2】 由于 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\geqslant 0,\\ \cos x, & x<0\end{cases}$ 是一个连续函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_0^x e^t\mathrm{d}t, & x\geqslant 0\\ \int_0^x \cos t\mathrm{d}t, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^x-1, & x\geqslant 0,\\ \sin x, & x<0.\end{cases}$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【例 20】 (2016，数一、二) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$ (B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ (D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

解

【方法 1】 求 $F(x)$.

【方法 2】 验证 $F'(x)=f(x)$.

【D】

【例 21】 计算$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x(a>0)$.

解

【方法 1】 令 $x=a\sin t$.

【方法 2】 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}\sqrt{a^2-x^2}$.

【例 22】 (2006,数二) 计算 $I=\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解

【方法 1】 $\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int \arcsin \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}+\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$.

在$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$中,令$\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}=t$,则 $\mathrm{d}x=\frac{-t\mathrm{d}t}{1-t^2}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}=-\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}+C.$$

$$\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}+C.$$

【方法 2】 令$\arcsin \mathrm{e}^x=t$,则 $x=\ln\sin t,\mathrm{d}x=\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x&=\int \frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t=-\int t\mathrm{d}\frac{1}{\sin t}=-\frac{t}{\sin t}+\int \frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t\\&=-\frac{t}{\sin t}-\ln|\csc t+\cot t|+C\\&=-\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}-\ln\left|\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^x}\right|+C\\&=-\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}-\ln(1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}})+x+C.\end{aligned}$$

【例 23】 (2011,数三) 求不定积分$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=2\int(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)\mathrm{d}\sqrt{x}\\&=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)-\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}-2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\\&=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+\int \frac{\mathrm{d}(1-x)}{\sqrt{1-x}}-4\sqrt{x}\\&=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

【例 24】 (2009,数二、三) 计算不定积分$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x(x>0)$.

解

设$\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$,则$x=\frac{1}{t^2-1}$,

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\int \ln(1+t)\mathrm{d}\frac{1}{t^2-1}$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t.$$

而

$$\int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int \frac{(t+1)-(t-1)}{(t^2-1)(t+1)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2(t+1)}+C.$$

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}+C.$$

【例 25】 (1994,数五) 已知$\frac{\sin x}{x}$是$f(x)$的一个原函数,求$\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x$.

解

由于$\frac{\sin x}{x}$是$f(x)$的一个原函数,有

$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

因此

$$\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x=\int x^3\mathrm{d}f(x)$$

$$=x^3 f(x)-3\int x^2 f(x)\mathrm{d}x$$

$$=x^3 f(x)-3\int x^2\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^3 f(x)-3\left(x^2\cdot\frac{\sin x}{x}-2\int \sin x\mathrm{d}x\right)$$

$$=x^3\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-3x\sin x-6\cos x+C$$

$$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$$

【例 26】 (2002,数三、四) 设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$,求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

解

令 $u=\sin^2 x$,则有 $\sin x=\sqrt{u}$,$x=\arcsin\sqrt{u}$,$f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x&=\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x\\&=-\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}(1-x)\\&=-2\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{1-x}\\&=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int \sqrt{1-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}\sqrt{x}\\&=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

第五章　定积分与反常积分

大纲考试内容	大纲考试要求		
	数一	数二	数三
定积分的概念	理解	理解	了解
定积分的性质及定积分中值定理	掌握	掌握	了解
积分上限的函数	理解	理解	理解
牛顿－莱布尼茨公式 定积分的换元积分法和分部积分法	掌握	掌握	掌握
积分上限的函数的导数	会求	会求	会求
反常积分的概念	理解	理解	理解
反常积分收敛的比较判别法	了解	了解	了解

第一节　定积分

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

考试内容概要

一、定积分的概念

1. 定积分的定义

定义　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义且有界.

(1) **分割**　在 $[a,b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ 表示第 i 个小区间的长度.

(2) **求和**　在 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$.

(3) **取极限**　若极限 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，且此极限值既不依赖于区间 $[a,b]$ 的分法，也不依赖于点 ξ_i 的取法，则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上**可积**，并称此极限为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上

的**定积分**，记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

【注】 (1) 定积分表示一个数值，仅与积分区间$[a,b]$和被积函数$f(x)$有关，与积分变量x无关，因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 若积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，且极限$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$与$\xi_i$的取法和区间$[a,b]$的分法无关.

因此，如果积分$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$存在，就可将$[0,1]$区间n等分，此时$\Delta x_i = \frac{1}{n}$，取$\xi_i = \frac{i}{n}$，由定积分的定义得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

上式在用定积分定义求极限时是一种常见形式.

2. 定积分存在的充分条件

定理 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$必定存在.

定理 若$f(x)$在$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$必定存在.

定理 若$f(x)$在$[a,b]$上只有有限个第一类间断点，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$必定存在.

3. 定积分的几何意义

(1) 设$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在，若在$[a,b]$上$f(x)\geqslant 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值等于以曲线$y=f(x)$，$x=a$，$x=b$及x轴所围成的曲边梯形的面积.

(2) 若在$[a,b]$上$f(x)\leqslant 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值等于以曲线$y=f(x)$，$x=a$，$x=b$及x轴所围成的曲边梯形面积的负值.

(3) 若在$[a,b]$上$f(x)$的值有正也有负，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值等于x轴上方的面积减去x轴下方的面积所得之差.

二、定积分的性质

1. 不等式性质

(1) 若在区间$[a,b]$上$f(x)\leqslant g(x)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(2) 若 M 及 m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

(3) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$

2. 中值定理

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \qquad (a<\xi<b).$$

常称 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**平均值**.

(2) 若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 不变号，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

三、积分上限的函数

变上限的积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是其上限 x 的函数，常称之为**积分上限函数**.

定理 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x}=f(x)$. (图 1)

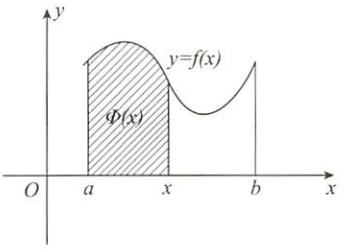


图 1

由原函数的概念可知，如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数. 由此可知，连续函数必有原函数.

【注】 如果 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 为可导函数，则

$$\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x).$$

变上限积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 表示一个函数，因此，我们经常会遇到与函数相关的问题：如求极限，判定连续性，求导数，求微分，判定单调性，曲线的凹凸性等.

定理 设函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续，则

如果 $f(x)$ 为奇函数，那么 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 必为偶函数；

如果 $f(x)$ 为偶函数，那么 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 必为奇函数.

四、定积分的计算

定积分的计算主要有以下五种方法：

1. 牛顿－莱布尼茨公式

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. 换元积分法

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，函数 $x = \varphi(t)$ 满足以下条件：

(1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$；

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上有连续导数，且 $R_\varphi \subseteq I$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

3. 分部积分法

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$$

4. 利用奇偶性和周期性

(1) 设 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的连续函数 $(a>0)$，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x)\text{为奇函数时}, \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{为偶函数时}. \end{cases}$$

(2) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则对任给数 a，总有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

5. 利用已有公式

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}, \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的奇数}. \end{cases}$

(2) $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$ （其中 $f(x)$ 连续）.

常考题型与典型例题

常考题型

1. 定积分的概念、性质及几何意义
2. 定积分的计算
3. 变上限积分

一、定积分的概念、性质及几何意义

【例 1】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=$ _____.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]\left(\text{提可爱因子}\frac{1}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

【例 2】 (2012,数二) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$ _____.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【$\frac{\pi}{4}$】

【例 3】 (2016,数二、三) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)=$ _____.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)$$

$$=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{d}\cos x$$

$$=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\mathrm{d}x$$

$$=-\cos 1+\sin x\Big|_0^1$$

$$=\sin 1-\cos 1.$$

【例 4】 (2017,数一、二、三) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=$ _____.

【$\frac{1}{4}$】

【例 5】 (2007,数一、二、三) 如图 2,连续函数 $y=f(x)$ 在区间$[-3,-2]$,$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间$[-2,0]$,$[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则下列结论正确的是

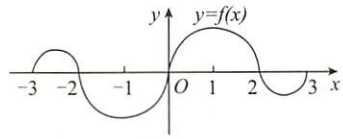


图 2

(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$.　　(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$.　　(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$.

【C】

【例 6】 (1997,数一、二) 设在区间$[a,b]$ 上 $f(x)>0$,$f'(x)<0$,$f''(x)>0$. 令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$S_2=f(b)(b-a)$,$S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$,则

(A) $S_1<S_2<S_3$.　　(B) $S_2<S_1<S_3$.

(C) $S_3<S_1<S_2$.　　(D) $S_2<S_3<S_1$.

【B】

【例 7】 (2011,数一、二、三) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x$,$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x$,$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$,则 I,J,K 的大小关系为

(A) $I<J<K$.　(B) $I<K<J$.　(C) $J<I<K$.　(D) $K<J<I$.

解

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时,

$$\sin x<\cos x<\frac{\cos x}{\sin x}<\cot x$$

又 $\ln x$ 在$(0,+\infty)$ 上单调增,则

$$\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$$

故 $I<K<J$.

选(B).

【例 8】 (2017,数二) 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$,且 $f''(x)>0$,则

(A) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x>0$.　　(B) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x<0$.

(C) $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x>\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x<\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

解

【方法 1】 几何法

【方法 2】 具体函数法　　【B】

【例 9】 (1991,数一、二) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 内可导,且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x=f(0)$,证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c,使 $f'(c)=0$.

二、定积分的计算

【例 10】 (2001,数二) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x=$ _____.

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x\\&=2\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin^4 x)\mathrm{d}x\\&=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\\&=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

【例 11】 (2017,数三) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=$ _____.

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\int_{0}^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\mathrm{d}x\\&=2\cdot\frac{\pi\cdot\pi^2}{4}\quad(\text{几何意义})\\&=\frac{\pi^3}{2}.\end{aligned}$$

【注】 由几何意义可知当 $a>0$ 时，

1) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{4}$，

2) $\int_0^a \sqrt{2ax-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{4}$，

3) $\int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{2}$.

【例 12】 (2000，数一) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$ _____.

【$\frac{\pi}{4}$】

【例 13】 $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,\mathrm{d}x=$ _____.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x \qquad \left(\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x \qquad (\text{对称性})\\ &= \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\ &= \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

【例 14】 (2005，数二) 计算 $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

【$\frac{\pi}{4}$】

【例 15】 (2010,数一) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x=$ _____.

解

令$\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\int_0^{\pi}t^2\cos t\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi}t^2\mathrm{d}\sin t\\&=2t^2\sin t\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}t\sin t\mathrm{d}t\\&=-4\int_0^{\pi}t\sin t\mathrm{d}t=(-4)\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t\\&=(-4)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2=-4\pi.\end{aligned}$$

【例 16】 计算$\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x$.

解

【方法 1】 分部 + 几何意义.

【方法 2】 令 $x=\sin t$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【$\frac{\pi}{8}$】

【例 17】 (1995,数三) 设 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$,计算$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

解

【方法 1】
$$\begin{aligned}\text{原式}&=xf(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x\\&=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x\\&=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2.\end{aligned}$$

【方法 2】
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}(x-\pi)\\&=(x-\pi)f(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(x-\pi)f'(x)\mathrm{d}x\\&=-\int_0^{\pi}\frac{(x-\pi)\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2.\end{aligned}$$

三、变上限积分

【例 18】 设 $f(x)$ 连续，试求下列函数的导数.

(1) $\int_{e^x}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$；　　(2) $\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$；

(3) $\int_0^x \cos(x-t)^2\mathrm{d}t$；　　(4) $\int_1^2 f(x+t)\mathrm{d}t$.

【例 19】 (2015，数二、三) 设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$. 若 $\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$ _____.

【2】

【例 20】 (1998，数一) 设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$

(A) $xf(x^2)$.　　(B) $-xf(x^2)$.　　(C) $2xf(x^2)$.　　(D) $-2xf(x^2)$.

解

【方法 1】 直接法

令 $x^2-t^2=u$，$-2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$，

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u\right)=xf(x^2),$$

故应选(A).

【方法 2】 排除法

令 $f(x)\equiv 1$，显然 $f(x)$ 满足题设条件，此时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x t\mathrm{d}t\right)=x$$

将 $f(x)\equiv 1$ 代入四个选项中可知，排除(B)，(C)，(D). 故应选(A).

【例 21】 (1993,数三) 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 设 $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant 2)$,则 $F(x)$ 为

(A)$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ (B)$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

(C)$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ (D)$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

解

【方法 1】 求 $F(x)$.

【方法 2】 验证 $F'(x)=f(x)$. 【D】

【例 22】 (1988,数二) 设 $x\geqslant -1$,求 $\int_{-1}^x(1-|t|)\mathrm{d}t$.

【$\begin{cases}\frac{1}{2}(1+x)^2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-\frac{1}{2}(1-x)^2, & x>0.\end{cases}$】

【例 23】 (2013,数二) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 2, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则

(A)$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点. (B)$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

(C)$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导. (D)$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

解

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_0^x \sin t\mathrm{d}t, & 0\leqslant x<\pi\\ \int_0^\pi \sin t\mathrm{d}t+\int_\pi^x 2\mathrm{d}t, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-\cos x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 2+2(x-\pi), & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

显然,$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续,又

$$F'_-(\pi)=(1-\cos x)'\Big|_{x=\pi}=\sin x\Big|_{x=\pi}=0,$$

$$F'_+(\pi)=[2+2(x-\pi)]'\Big|_{x=\pi}=2,$$

则 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处不可导,故应选(C).

【例 24】 (1998,数二) 确定常数 a,b,c 的值,使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\quad(c\neq 0)$.

【$a=1,b=0,c=\dfrac{1}{2}$】

【例 25】 (2017,数二、三) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$.

解

【方法 1】 令 $x-t=u$.

【方法 2】 积分中值定理.

【$\dfrac{2}{3}$】

【例 26】 (2010,数三) 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\,\mathrm{d}t$ 确定,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ _____.

【-1】

第二节 反常积分

考试内容概要

一、无穷区间上的反常积分

定义 (1) 设 $f(x)$ 为 $[a,+\infty)$ 上的连续函数,如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称此极限为函数 $f(x)$ 在**无穷区间** $[a,+\infty)$ **上的反常积分**,记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,$$

这时也称反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**. 如果上述极限不存在,则称反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

(2) 设 $f(x)$ 为$(-\infty,b]$上的连续函数,则可类似的定义函数 $f(x)$ 在**无穷区间**$(-\infty,b]$**上的反常积分**

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 设 $f(x)$ 为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数,如果反常积分

$$\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x \text{ 和} \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛,则称反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**,且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

如果$\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 至少有一个发散,则称$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

定理 1 (比较判别法)

设 $f(x),g(x)$ 在$[a,+\infty)$上连续,且 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,则

(1) 当$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时,$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 2 (比较判别法的极限形式)

设 $f(x),g(x)$ 在$[a,+\infty)$上非负连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$(有限或无穷),则

(1) 当 $\lambda\neq 0$ 时,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散;

(2) 当 $\lambda = 0$ 时,若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

(3) 当 $\lambda = +\infty$ 时,若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散,则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

常用结论: $\int_a^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x\begin{cases}p>1, & \text{收敛},\\ p\leqslant 1, & \text{发散},\end{cases}\quad (a>0).$

【例 1】 判别下列反常积分的敛散性

(1)$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$, (2)$\int_1^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解

【方法 1】 (1) 由于$\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}<\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$,而$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,则$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由于

$$\frac{x}{1+x} \geqslant \frac{x}{x^2+x^2} = \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x},$$

而$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x}$发散，则$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$发散.

【方法 2】 (1) 由于

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \neq 0,$$

而$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}}}$收敛，则$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛.

(2) 由于$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$，而$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$发散，则$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$发散.

二、无界函数的反常积分

如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界，那么点 a 称为函数 $f(x)$ 的瑕点(也称为无界点). 无界函数的反常积分也称为**瑕积分**.

定义 (1) 设函数 $f(x)$ 在$(a,b]$上连续，点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点. 如果极限

$$\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在**区间**$[a,b]$**上的反常积分**，记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\mathrm{d}x,$$

这时也称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$**收敛**. 如果上述极限不存在，则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$**发散**.

(2) 设函数 $f(x)$ 在$[a,b)$上连续，点 b 为函数 $f(x)$ 的瑕点. 则可类似的定义函数 $f(x)$ 在**区间**$[a,b]$**上的反常积分**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上除点 $c(a<c<b)$ 外连续，点 c 为函数 $f(x)$ 的瑕点.

如果反常积分

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \text{ 和} \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$**收敛**，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$与$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$至少有一个发散，则称$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$**发散**.

定理 1 （比较判别法）

设 $f(x),g(x)$ 在$(a,b]$上连续，且$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，$x=a$为$f(x)$和$g(x)$的瑕点，则

(1) 当$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；

(2) 当$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散时，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散.

定理 2 （比较判别法的极限形式）

设 $f(x),g(x)$ 在$(a,b]$上非负连续，且$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$（有限或无穷），则

(1) 当$\lambda \neq 0$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$同敛散；

(2) 当$\lambda = 0$时，若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也收敛；

(3) 当$\lambda = +\infty$时，若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也发散.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

常用结论：$\int_a^b \dfrac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x \begin{cases} p<1, & \text{收敛}, \\ p\geqslant 1, & \text{发散}. \end{cases}$

$\int_a^b \dfrac{1}{(b-x)^p}\mathrm{d}x \begin{cases} p<1, & \text{收敛}, \\ p\geqslant 1, & \text{发散}. \end{cases}$

【例 2】 判定反常积分$\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$的敛散性.

解 该反常积分的被积函数有两个无界点，$x=0$和$x=1$，

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}.$$

由于$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 1$，而$\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$收敛，则$\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$收敛.

又$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1$，而$\int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$收敛，则$\int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$收敛.

故$\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$收敛.

常考题型与典型例题

常考题型

1. 反常积分的敛散性
2. 反常积分的计算

一、反常积分的敛散性

【例 3】 (2015,数二) 下列反常积分中收敛的是

(A) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

(C) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

【D】

【例 4】 (2013,数二) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<\mathrm{e},\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geqslant \mathrm{e}.\end{cases}$$

若反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛,则

(A)$\alpha<-2$.　　(B)$\alpha>2$.　　(C)$-2<\alpha<0$.　　(D)$0<\alpha<2$.

解

$$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\alpha-1}}+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\alpha+1}x}.$$

$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛等价于$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\alpha-1}}$与$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\alpha+1}x}$都收敛,而

$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$$

收敛当且仅当$\alpha-1<1$,即$\alpha<2$.

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\alpha+1}x}\xlongequal{\ln x=u}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^{\alpha+1}},$$

而$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^{\alpha+1}}$收敛当且仅当$\alpha+1>1$，即$\alpha>0$.

故若$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，则$0<\alpha<2$，故应选(D).

【例 5】 (2016，数二) 反常积分$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$的敛散性为

(A) 收敛，收敛. (B) 收敛，发散. (C) 发散，收敛. (D) 发散，发散.

【B】

【例 6】 (2016，数一) 反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$收敛，则

(A)$a<1,b>1$. (B)$a>1,b>1$.

(C)$a<1,a+b>1$. (D)$a>1,a+b>1$.

【C】

二、反常积分的计算

【例 7】 (2000，数二) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}}=$_____.

【$\frac{\pi}{3}$】

【例 8】 (2000,数四) 计算 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}$.

解

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}&=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^2}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^2+(\mathrm{e}^x)^2}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}}\arctan\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{\pi}{4\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

【例 9】 (2013,数一、三) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$ _____.

【$\ln 2$】

第六章　定积分的应用

大纲考试内容	大纲考试要求		
	数一	数二	数三
利用定积分计算 平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值	会计算	会计算	会计算
用定积分表达和计算一些几何量与物理量 平面曲线的弧长、旋转体的侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等	掌握	掌握	
利用定积分求解简单的经济应用问题			会解

考试内容概要

用定积分可表示一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、变力做功、压力和函数平均值等),定积分的这些应用有个共同思想,即建立“微元”,然后对微元积分就得到所求量.

一、几何应用

1. 平面图形的面积

(1) 若平面域 D 由曲线 $y=f(x)$,$y=g(x)(f(x)\geqslant g(x))$,$x=a$,$x=b(a<b)$ 所围成,则平面域 D 的面积为

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$$

(2) 若平面域 D 由曲线 $r=r(\theta)$,$\theta=\alpha$,$\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 所围成,则其面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

2. 旋转体体积

若区域 D 由曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$ 和直线 $x=a$,$x=b(0\leqslant a<b)$ 及 x 轴所围成,则

(1) 区域 D 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体体积为

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 区域 D 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

3. 曲线弧长（数三不要求）

(1) $C: y = y(x), a \leqslant x \leqslant b.$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x.$$

(2) $C: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$

$$s = \int_a^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\mathrm{d}t.$$

(3) $C: r = r(\theta), \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta.$

$$s = \int_a^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\mathrm{d}\theta.$$

4. 旋转体侧面积（数三不要求）

曲线 $y = f(x)(f(x) \geqslant 0)$ 和直线 $x = a, x = b(0 \leqslant a < b)$ 及 x 轴所围成区域绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积为

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

二、物理应用（数学三不要求）

1. 压力；　　2. 变力做功；　　3. 引力.

常考题型与典型例题

【例 1】 (2014，数三) 设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为_____.

解

所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_D 1\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}y \int_{-y}^{-\frac{1}{y}} \mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \left(y - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{2}y^2 - \ln y\right)\Big|_1^2 \\ &= 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \ln 2. \end{aligned}$$

【例 2】 (2013,数二)设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$,则 L 所围平面图形的面积是_____.

【$\frac{\pi}{12}$】

【例 3】 (2015,数二、三)设 $A>0$,D 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0$,$x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域,V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转所成旋转体的体积. 若 $V_1=V_2$,求 A 的值.

解

$$V_1=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}A^2\sin^2 x\mathrm{d}x=\pi A^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2A^2}{4}.$$

$$V_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot A\sin x\mathrm{d}x=-2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\cos x$$

$$=-2\pi A\left(x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x\right)$$

$$=-2\pi A(0-1)=2\pi A.$$

又 $V_1=V_2$,则

$$\frac{\pi^2A^2}{4}=2\pi A,$$

解得 $A=\frac{8}{\pi}$.

【例 4】 (2012,数二)过点(0,1)作曲线 $L:y=\ln x$ 的切线,切点为 A,又 L 与 x 轴交于 B 点,区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解

【方法 1】 设切点为(x_0,y_0),则切线方程为 $y-y_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$.

【方法 2】 设过点(0,1)的切线方程为 $y-1=kx$.

【$S=2$,$V=\frac{2\pi}{3}(\mathrm{e}^2-1)$】

【例 5】 (2011,数一、二) 曲线 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$ _____.

【$\ln(1+\sqrt{2})$】

【例 6】 (2011,数二) 一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面,该曲线由 $x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\left(y\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 连接而成.

(1) 求容器的容积;

(2) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出,至少需要做多少功?

(长度单位:m,重力加速度为 $g\,\mathrm{m/s^2}$,水的密度为 $10^3\,\mathrm{kg/m^3}$)

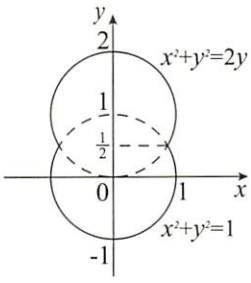


图 1

解

(1) 由对称性,所求的容积为

$$V=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}y=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\mathrm{d}y=\frac{9\pi}{4},$$

即该容器的容积为 $\frac{9\pi}{4}\mathrm{m}^3$.

(2) 所求的功为

$$\begin{aligned}W&=10^3\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi(1-y^2)(2-y)g\mathrm{d}y+10^3\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi[2y-y^2](2-y)g\mathrm{d}y\\&=10^3\pi g\left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y-2y^2+y^3)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(4y-4y^2+y^3)\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{27\times10^3}{8}\pi g,\end{aligned}$$

即所求的功为 $\frac{27\times10^3}{8}\pi g\mathrm{J}$.

【例 7】 (2002,数二)某闸门的形状与大小如图 2 所示,其中 y 轴为对称轴,闸门的上部为矩形 $ABCD$,其中 $DC=2\text{m}$,下部由二次抛物线与线段 AB 所围成,当水面与闸门的上端相平时,欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5∶4,闸门矩形部分的高 h 应为多少 m(米)?

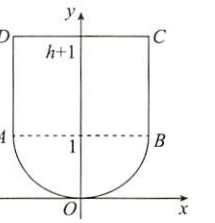


图 2

解

如图 2 建立坐标系,则抛物线的方程为 $y=x^2$.

闸门矩形部分承受的水压力

$$P_1=2\int_1^{h+1}\rho g(h+1-y)\mathrm{d}y=2\rho g\left[(h+1)y-\frac{y^2}{2}\right]\Big|_1^{h+1}$$

$$=\rho g h^2,$$

其中 ρ 为水的密度,g 为重力加速度.

闸门下部承受的水压力

$$P_2=2\int_0^1\rho g(h+1-y)\sqrt{y}\mathrm{d}y$$

$$=2\rho g\left[\frac{2}{3}(h+1)y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_0^1$$

$$=4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

由题意知 $\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{5}{4}$,即

$$\frac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right)}=\frac{5}{4},$$

解之得 $h=2$,$h=-\dfrac{1}{3}$(舍去),故 $h=2$,即闸门矩形部分的高应为 2m.

第七章　微分方程

大纲考试内容	大纲考试要求		
	数一	数二	数三
微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念	了解	了解	了解
变量可分离的微分方程 一阶线性微分方程	掌握求解方法	掌握求解方法	掌握求解方法
齐次微分方程	会解	会解	会解
降阶法解下列形式的微分方程 $y^{(n)}=f(x)$，$y''=f(x,y')$ 和 $y''=f(y,y')$	会用	会用	
线性微分方程解的性质及解的结构	理解	理解	理解
二阶常系数齐次线性微分方程的解法	掌握	掌握	掌握
某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程	会解	会解	会解
自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程	会解	会解	会解
差分与差分方程及其通解与特解 一阶常系数线性差分方程的求解方法			了解
伯努利方程 全微分方程 欧拉方程	会解		
微分方程解决一些简单的应用问题	会用	会用	会用（微分方程解决一些简单的**经济**应用问题）

考试内容概要

一、常微分方程的基本概念

1. 微分方程

含有未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程**，简称**方程**.

2. 微分方程的阶

微分方程中所出现的未知函数最高阶导数的阶数，称为微分方程的**阶**.

3. 微分方程的解

满足微分方程的函数，称为该方程的**解**.

4. 微分方程的通解

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则称之为微分方程的**通解**.

5. 微分方程的特解

微分方程的不含任意常数的解，称之为**特解**.

6. 初始条件

确定特解的一组常数称为**初始条件**.

7. 积分曲线

方程的一个解在平面上对应一条曲线，称为该微分方程的**积分曲线**.

二、一阶微分方程

1. 可分离变量的方程

能表示为 $g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$ 的方程，称为**可分离变量的方程**.

求解的方法是两端积分

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

【例 1】 (2006,数一、二) 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是_____.

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(1-x)}{x},$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{1-x}{x}dx,$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{1-x}{x}dx,$$

$$\ln|y|=\ln|x|-x+C_1,$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right|=-x+C_1,$$

$$\left|\frac{y}{x}\right|=e^{C_1}e^{-x},$$

$$\frac{y}{x}=\pm e^{C_1}e^{-x}=Ce^{-x},$$

$y=Cxe^{-x}$,C 为任意常数.

2. 齐次微分方程

能化为 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的微分方程称为**齐次微分方程**.

求解齐次微分方程的一般方法:令 $u=\dfrac{y}{x}$,则 $y'=u+xu'$,从而将原方程化为 $xu'=\varphi(u)-u$,此方程为可分离变量的方程.

【例 2】 (1993,数一、二) 求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.

解

原方程为齐次方程,可改写为 $y'=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-\dfrac{y}{x}$. 令 $u=\dfrac{y}{x}$,则 $xu'+u=u^2-u$,

$$xu'=u^2-2u,$$

分离变量得

$$\frac{du}{u^2-2u}=\frac{1}{x}dx.$$

积分得

$$\frac{1}{2}(\ln|u-2|-\ln|u|)=\ln|x|+C_1,$$

$$\frac{u-2}{u}=Cx^2,$$

即

$$\frac{y-2x}{y}=Cx^2.$$

由 $y(1)=1$，得 $C=-1$，得所求的特解为 $\dfrac{y-2x}{y}=-x^2$，即 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

3. 一阶线性微分方程

形如 $y'+p(x)y=q(x)$ 的方程称为**一阶线性微分方程**.

求解一阶线性微分方程的一般方法：常数变易法，或直接利用以下通解公式

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right].$$

【例 3】 (2008，数二、四) 微分方程 $(y+x^2\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$ 的通解是_____.

解

$$(y+x^2\mathrm{e}^{-x})-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}y=x\mathrm{e}^{-x},$$

由线性方程通解公式得

$$y=\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x\left(\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=x(-\mathrm{e}^{-x}+C)=x(C-\mathrm{e}^{-x}).$$

4. 伯努利方程 (仅数学一要求)

形如 $y'+p(x)y=Q(x)y^n$ 的方程 $(n\neq 0,1)$，称为**伯努利方程**.

求解伯努利方程的一般方法：令 $u=y^{1-n}$，将原方程化为一阶线性微分方程.

5. 全微分方程 (仅数学一要求)

如果方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的左端是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分

$$\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

则称该方程为**全微分方程**. 此方程的通解为

$$u(x,y)=C.$$

求 $u(x,y)$ 有以下三种方法：

(1) 偏积分；　　(2) 凑微分；　　(3) 线积分.

当 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数时，方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

【注】 如果给定的一阶微分方程不属于上述五种标准形式，首先考虑将 x,y 对调，即认定 x 为 y 的函数，再判定新方程的类型；或者利用简单的变量代换将其化为上述五种类型之一而求解.

三、可降阶的高阶方程（数学三不要求）

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

2. $y''=f(x,y')$ 型的方程

只需令 $y'=p,y''=p'$，可将原方程化为一阶微分方程.

【例 4】 (2000，数一) 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为_____.

【$y=C_1+\dfrac{C_2}{x^2}$】

3. $y''=f(y,y')$ 型的方程

只需令 $y'=p,y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，可将原方程化为一阶微分方程.

【例 5】 (2002，数一、二) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=1,y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是_____.

解

令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$，代入原方程得

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0,$$

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=-p,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

$$\ln|p|=-\ln|y|+C_1,$$

$$\ln|yp|=C_1,$$

$$yp=\pm\mathrm{e}^{C_1}=C.$$

由 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 知，$C=\frac{1}{2}$，则

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2},$$

$$\int y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x+C_2.$$

由 $y\Big|_{x=0}=1$ 知，$C_2=\frac{1}{2}$，则

$$y^2=x+1, y=\pm\sqrt{x+1}.$$

由 $y\Big|_{x=0}=1$ 知，$y=\sqrt{x+1}$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

四、高阶线性微分方程

1. 线性微分方程的解的结构

这里只讨论二阶线性微分方程，其结论可以推广到更高阶的方程. 二阶线性微分方程的一般形式为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x),$$

这里的 $p(x), q(x), f(x)$ 均为连续函数. 当方程右端的 $f(x)\equiv 0$ 时，称为**二阶线性齐次方程**，否则称为**二阶线性非齐次方程**.

齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0.$ ①

非齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x).$ ②

定理 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程 ① 的两个线性无关的特解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

就是方程 ① 的通解.

【注】 方程 ① 的两个解线性无关的充要条件是它们之比不为常数.

定理 如果 y^* 是非齐次方程 ② 的一个特解，$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程 ① 的两个线性无关的特解，则

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$$

是非齐次微分方程 ② 的通解.

定理 如果 $y_1^*(x), y_2^*(x)$ 是非齐次方程 ② 的两个特解，则 $y(x)=y_2^*(x)-y_1^*(x)$ 是齐次微分方程 ① 的解.

定理 如果 $y_1^*(x), y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x),$$
$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

的一个特解.

2. 常系数齐次线性微分方程

二阶常系数线性齐次微分方程的一般形式为

$$y''+py'+qy=0, \tag{3}$$

其特征方程为 $r^2+pr+q=0$，设 r_1,r_2 为该方程的两个根.

(1) 若 $r_1\neq r_2$ 为两个不相等的实特征根，则方程 ③ 的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}.$$

(2) 若 $r_1=r_2$ 为二重实特征根，则方程 ③ 的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}.$$

(3) 若 $r_1=\alpha+i\beta,r_2=\alpha-i\beta$ 为一对共轭复根，则方程 ③ 的通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

【例 6】 (2013，数三) 微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为_____.

【$y=e^{\frac{1}{2}x}(C_1+C_2x)$】

【例 7】 (1996，数三) 微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为 $y=$ _____.

【$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$】

【例 8】 (2010,数二) 三阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为 $y=$ _____.

解

特征方程为

$$r^3-2r^2+r-2=0,$$

$$(r-2)(r^2+1)=0,$$

$$r_1=2, r_{2,3}=\pm i,$$

则该方程通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

3. 常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数线性非齐次微分方程的一般形式为

$$y''+py'+qy=f(x). \tag{4}$$

(1) 若 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$,其中 $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式,则方程 ④ 的特解可设为

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x},$$

其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的多项式,k 是特征方程含根 λ 的重复次数.

(2) 若 $f(x)=e^{\alpha x}[P_l^{(1)}(x)\cos\beta x+P_n^{(2)}(x)\sin\beta x]$,其中 $P_l^{(1)}(x)$,$P_n^{(2)}(x)$ 分别为 x 的 l 次,n 次多项式,则方程 ④ 的特解可设为

$$y^*=x^ke^{\alpha x}[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x+R_m^{(2)}(x)\sin\beta x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$,$R_m^{(2)}(x)$ 是两个 m 次多项式,$m=\max\{l,n\}$.

当 $\alpha+i\beta$ 不是方程 ③ 的特征根时,取 $k=0$;

当 $\alpha+i\beta$ 是方程 ③ 的单特征根时,取 $k=1$.

【例 9】 (1995,数三) 微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为 $y=$ _____.

【$y=-2x+C_1\cos x+C_2\sin x$】

【例 10】 (2007,数一、二) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$ _____.

解

齐次微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+3=0,$$

$$(r-3)(r-1)=0,$$

$$r_1=3,r_2=1,$$

则齐次方程通解为

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}.$$

令非齐次方程特解为

$$y^*=ae^{2x}.$$

代入原方程得

$$a(4-8+3)e^{2x}=2e^{2x},$$

则 $a=-2$,则原方程通解为

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-2e^{2x}.$$

4. 欧拉方程（仅数学一要求）

形如

$$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$$

（其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为常数）的方程称为**欧拉方程**.

令 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$,可将上述欧拉方程化为线性常系数方程,一般地有

$$x^ky^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y,$$

其中 D 代表对 t 求导数的运算.

【例 11】 (2021,数一) 欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1,y'(1)=2$ 的解为 $y=$ _____.

解

令 $x=e^t$,代入原方程得

$$D(D-1)y+Dy-4y=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4y=0.$$

该方程特征方程为

$$r^2-4=0,$$

$$r=\pm2,$$

则该方程通解为

$$y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}=C_1x^2+\frac{C_2}{x^2}.$$

由 $y(1)=1, y'(1)=2$ 知

$$\begin{cases} C_1+C_2=1, \\ 2C_1-2C_2=2, \end{cases}$$

解得 $C_1=1, C_2=0$，则所求特解为

$$y=x^2.$$

5. 差分方程（仅数学三要求）

一阶常系数线性齐次差分方程

$$y_{t+1}+ay_t=0 \tag{1}$$

的通解为 $y_c(t)=C\cdot(-a)^t$，C 为任意常数.

一阶常系数线性非齐次差分方程

$$y_{t+1}+ay_t=f(t) \tag{2}$$

的通解为 $y_t=y_c(t)+y_t^*$，其中 y_t^* 是非齐次差分方程 ② 的特解.

(1) $f(t)=P_m(t)$，

若 $a\neq -1$，令 $y_t^*=Q_m(t)$；

若 $a=-1$，令 $y_t^*=tQ_m(t)$.

(2) $f(t)=d^t\cdot P_m(t)$，$(d\neq 0)$，

若 $a+d\neq 0$，令 $y_t^*=d^t\cdot Q_m(t)$；

若 $a+d=0$，令 $y_t^*=td^t\cdot Q_m(t)$.

【例 12】 (1997，数三) 差分方程 $y_{t+1}-y_t=t2^t$ 的通解为_____.

解 齐次方程通解为

$$y_c(t)=C\cdot 1^t=C.$$

令 $y_t^*=2^t(at+b)$，代入原方程得

$$2^{t+1}[a(t+1)+b]-2^t(at+b)=t2^t,$$

解得 $a=1, b=-2$，原方程通解为 $y_t=C+(t-2)2^t$.

【例 13】 (1998，数三) 差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为_____.

解 原方程对应的齐次差分方程为 $y_{t+1}+5y_t=0$，其通解为 $y_c(t)=C(-5)^t$.

设原方程的特解为 $y_t^*=at+b$，代入原方程得

$$2a(t+1)+2b+10at+10b=5t, \text{即 } 12at+2a+12b=5t.$$

比较系数知 $a=\frac{5}{12}, b=-\frac{5}{72}$，则 $y_t^*=\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)$. 从而原差分方程的通解为

$$y_t=C(-5)^t+\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right).$$

【例 14】 (2001,数三)某公司每年的工资总额在比上一年增加 20% 的基础上再追加 2 百万元,若以 W_t 表示第 t 年的工资总额(单位:百万元),则 W_t 满足的差分方程是_____.

解

$W_t = 1.2 \cdot W_{t-1} + 2$.

【例 15】 (2017,数三)差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的通解为_____.

解

齐次方程通解为 $y_c(t) = C \cdot 2^t$.

令 $y_t^* = at2^t$,代入原方程得

$$a(t+1)2^{t+1} - 2at2^t = 2^t,$$

$a = \frac{1}{2}$,原方程通解为 $y_t = C2^t + \frac{1}{2}t2^t$.

常考题型与典型例题

常考题型

1. 方程求解
2. 综合题
3. 应用题

一、方程求解

【例 16】 (2014,数一)微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解为 $y =$ _____.

解

由 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 得 $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$,该方程为齐次方程.

令 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得

$$u' = \frac{u(\ln u - 1)}{x},$$

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|\ln u - 1| = \ln x + C,$$

即 $\ln u-1=Cx$，$\ln\dfrac{y}{x}-1=Cx$，由 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 的得 $C=2$，则

$$\ln\frac{y}{x}-1=2x,\ y=x\mathrm{e}^{2x+1}.$$

【例 17】 (2012，数二) 微分方程 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$ _____.

解

【方法 1】 由 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 知

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x-3y^2=0,$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{x}{y}=3y.$

由线性方程通解公式得

$$\begin{aligned}x&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int 3y\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}+C\right]\\&=\frac{1}{y}\left[\int 3y^2\mathrm{d}y+C\right]\\&=y^2+\frac{C}{y}.\end{aligned}$$

由 $y\Big|_{x=1}=1$ 可知 $C=0$，则 $x=y^2$，$y=\pm\sqrt{x}$.

由 $y\Big|_{x=1}=1$ 可知，$y=\sqrt{x}$.

【方法 2】 由 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 知

$$(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)-3y^2\mathrm{d}y=0,$$

即 $\mathrm{d}(xy)-\mathrm{d}y^3=0$，

$$\mathrm{d}(xy-y^3)=0,$$

$$xy-y^3=C.$$

由 $y\Big|_{x=1}=1$ 知 $C=0$，则 $y=\sqrt{x}$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【例 18】 (2017，数一) 微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$ _____.

【$\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$】

【例 19】（2017，数二）微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$

(A) $Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.　　(B) $Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

(C) $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.　　(D) $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

【C】

【例 20】（2015，数二、三）设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处取得极值 3，则 $y(x)=$ _____.

【$2e^{x}+e^{-2x}$】

【例 21】（2015，数一）设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则

(A) $a=-3,b=2,c=-1$.　　(B) $a=3,b=2,c=-1$.

(C) $a=-3,b=2,c=1$.　　(D) $a=3,b=2,c=1$.

解

由 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{x}$ 是方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解可知，$y_1=e^{2x}$，$y_2=e^{x}$ 是齐次方程的两个线性无关的解，$y^*=xe^{x}$ 是非齐次方程的一个解. $r=1$ 和 $r=2$ 是齐次方程的特征方程的两个根，特征方程为

$$(r-1)(r-2)=0,$$

即

$$r^2-3r+2=0,$$

则

$$a=-3,b=2.$$

将 $y=xe^{x}$ 代入方程 $y''-3y'+2y=ce^{x}$，比较等式两端 e^{x} 项的系数得 $c=-1$. 故应选(A).

【例 22】（2009，数一）若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{x}$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为_____.

解

由微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$ 可知，$r=1$ 是齐次方程的特征方程的二重根，则齐次方程的特征方程为 $(r-1)^2=0$，即 $r^2-2r+1=0$，则 $a=-2,b=1$，非齐次方程为 $y''-2y'+y=x$.

设非齐次方程的特解为 $y^*=a'x+b'$，代入方程得 $a'=1,b'=2$，则其通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^x+x+2.$$

由 $y(0)=2,y'(0)=0$ 知 $C_1=0,C_2=-1$，故 $y=x(1-e^x)+2$.

【例 23】 (2013，数一、二) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x},y_2=e^x-xe^{2x},y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解为 $y=$ _____.

【$y=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$】

二、综合题

【例 24】 (1994，数三) 设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在

(A) x_0 的某个邻域内单调增加.　　(B) x_0 的某个邻域内单调减少.

(C) x_0 处取得极小值.　　(D) x_0 处取得极大值.

【C】

【例 25】 (2002，数二) 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A) 不存在.　　(B) 等于 1.　　(C) 等于 2.　　(D) 等于 3.

解

由 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 知 $y''(x)$ 连续且 $y''(0)=1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{2}{y''(0)}=2,$$

故应选(C).

【例 26】 (2018,数二、三) 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$,且 $f(0)=2$,则 $f(1)=$ _____.

解

由 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$ 知

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2xf(x)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

上式中令 $\Delta x\to 0$ 得

$$f'(x)=2xf(x).$$

解方程得

$$f(x)=Ce^{x^2}.$$

又 $f(0)=2$,则 $C=2$,$f(x)=2e^{x^2}$,$f(1)=2e$.

【例 27】 (1995,数四) 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$,求 $f(x)$.

解

等式 $f(x)=\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$ 两端对 x 求导数得一阶线性微分方程

$$f'(x)=3f(x)+2e^{2x},$$

即 $f'(x)-3f(x)=2e^{2x}$. 解此方程得

$$\begin{aligned}f(x)&=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)\\&=e^{3x}\left(\int 2e^{2x}\cdot e^{-3x}dx+C\right)\\&=e^{3x}\left(2\int e^{-x}dx+C\right)\\&=e^{3x}(C-2e^{-x})\\&=Ce^{3x}-2e^{2x}.\end{aligned}$$

由 $f(0)=1$,可得 $C=3$. 于是 $f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}$.

【例 28】 (2016,数三) 设函数 $f(x)$ 连续,且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt+e^{-x}-1.$$

求 $f(x)$ 的表达式.

解

令 $u=x-t$,则 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du$.

由题设知 $\int_0^x f(u)du=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt+e^{-x}-1.$

两端求导得 $f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-x}$，且 $f(0)=-1$.

因此 $f'(x)-f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

从而 $f(x)=\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=C\mathrm{e}^{x}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

由 $f(0)=-1$，得 $C=-\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=-\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

三、应用题

【例29】 (2015，数一、三) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对于任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

解

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

令 $y=0$ 得，$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

切线 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围区域的面积

$$S=\frac{1}{2}\frac{|f(x_0)|}{f'(x_0)}\cdot|f(x_0)|=4,$$

即 $\frac{1}{2}\frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)}=4$，记 $y=f(x_0)$，则 $\frac{1}{2}y^2=4y'$. 解方程得

$$-\frac{8}{y}=x+C.$$

由 $y(0)=2$ 知，$C=-4$，则所求曲线方程为 $y=\frac{8}{4-x}$.

【例30】 (2006，数三) 在 xOy 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M(1,0)$，其上任意点 $P(x,y)(x\neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a>0$).

(1) 求 L 的方程；

(2) 当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时，确定 a 的值.

解

(1) 依题意得 $y'-\frac{1}{x}y=ax$，求得其通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int ax\,\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=ax^2+Cx.$$

将 $x=1, y=0$ 代入上式得 $C=-a$. 从而 L 的方程为 $y=ax^2-ax$.

(2)L 与直线 $y=ax$ 的交点坐标为(0,0)和(2,2a),那么 L 与直线 $y=ax$ 围成平面图形的面积

$$S(a)=\int_0^2(ax-ax^2+ax)\mathrm{d}x=\int_0^2(2ax-ax^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a.$$

于是由题设知 $\frac{4}{3}a=\frac{8}{3}$,从而 $a=2$.

【例 31】 (2009,数二) 设非负函数 $y=y(x)(x\geqslant 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$. 当曲线 $y=y(x)$ 过原点时,其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2,求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解

记 $y'=p$,则 $y''=p'$,代入微分方程,当 $x>0$ 时,

$$p'-\frac{1}{x}p=-\frac{2}{x}.$$

解得

$$y'=p=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\left(-\frac{2}{x}\right)\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right]=x\left[\int\left(-\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x+C_1\right]=2+C_1x$$

因此 $y=2x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2,(x>0)$.

由已知 $y(0)=0$,有 $\lim\limits_{x\to 0^+}y=0$,于是 $C_2=0, y=2x+\frac{1}{2}C_1x^2$.

由于 $2=\int_0^1\left(2x+\frac{1}{2}C_1x^2\right)\mathrm{d}x=1+\frac{1}{6}C_1$,所以 $C_1=6$,故

$$y=2x+3x^2.$$

故所求体积为 $V=2\pi\int_0^1xy(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1(2x^2+3x^3)\mathrm{d}x=\frac{17\pi}{6}$.

第八章　多元函数微分学

大纲考试内容	大纲考试要求		
	数一	数二	数三
多元函数的概念 二元函数的几何意义 多元函数偏导数和全微分的概念 多元函数极值和条件极值的概念	理解	了解	了解
二元函数的极限与连续的概念 二元函数极值存在的充分条件	了解	了解	了解
多元函数极值存在的必要条件	掌握	掌握	掌握
多元复合函数一阶、二阶偏导数 全微分 多元隐函数的偏导数 二元函数的极值 简单多元函数的最大值和最小值 简单的应用问题	会求	会求	会求
拉格朗日乘数法求条件极值	会用	会用	会用
有界闭区域上二元连续函数的性质		了解	了解
有界闭区域上多元连续函数的性质	了解		
全微分存在的必要条件和充分条件 全微分形式的不变性	了解		
隐函数存在定理	了解	了解	了解
二元函数的二阶泰勒公式	了解		

第一节　多元函数的基本概念

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

考试内容概要

一、多元函数的极限

定义　设 D 是平面上的一个点集，若对每个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按照某一对应法则 f 有一个确定的值与之对应，则称 z 为 x,y 的**二元函数**，记为

$$z = f(x,y),$$

其中点集 D 称为该函数的**定义域**，x,y 称为**自变量**，z 称为**因变量**. 函数值 $f(x,y)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**，记为 $f(D)$.

通常情况下，二元函数 $z = f(x,y)$ 在几何上表示一张空间曲面.

定义 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上有定义，点 $P_0(x_0,y_0) \in D$ 或为 D 的边界点，如果 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $P(x,y) \in D$，且 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ 时，都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ **当** $(x,y) \to (x_0,y_0)$ **时的极限**，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A \text{ 或 } \lim_{P\to P_0} f(P) = A.$$

【注】 (1) 这里的极限是要求点 (x,y) 在 D 内以任意方式趋近于点 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 都趋近于同一确定的常数 A，否则该极限就不存在.

(2) 一元函数极限中的下述性质对多元函数仍成立.

① 局部有界性，② 保号性，③ 有理运算，④ 极限与无穷小的关系，⑤ 夹逼性.

【例 1】 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

【例 2】 证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

二、多元函数的连续性

1. 连续的概念

定义 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上有定义，点 $P_0(x_0,y_0) \in D$，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

成立，则称函数 $f(x,y)$ **在点** $P_0(x_0,y_0)$ **连续**；如果 $f(x,y)$ 在区域 D 上的每个点 (x,y) 处都连续，则称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续.

2. 连续函数的性质

性质 1 多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零) 仍为连续函数.

性质 2 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

性质 3 多元初等函数在其定义区域内连续.

性质 4(最大值定理)

有界闭区域 D 上的连续函数在区域 D 上必能取得最大值与最小值.

性质 5(介值定理)

有界闭区域 D 上的连续函数在区域 D 上必能取得介于最大值与最小值之间的任何值.

三、偏导数

1. 偏导数的定义

定义 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义,如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称这个极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 x 的**偏导数**,记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad f'_x(x_0,y_0).$$

类似地,如果

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在,则称这个极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 y 的偏导数,记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad f'_y(x_0,y_0).$$

【注】 由以上定义不难看出偏导数本质上就是一元函数的导数,其中 $f'_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数,$f'_y(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数.

类似地,可以定义三元函数乃至 n 元函数的偏导数.

2. 二元函数偏导数的几何意义

设 $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点. 过点 M 作平面 $y=y_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 相交,其交线为平面 $y=y_0$ 上的曲线 $z=f(x,y_0)$,即 $\begin{cases}z=f(x,y_0),\\ y=y_0,\end{cases}$ 则 $f'_x(x_0,y_0)$ 表示上述交线在点 M 处的切线对 x 轴的斜率. 同样,过点 M 作平面 $x=x_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 相交,其交线为平面 $x=x_0$ 上的曲线 $z=f(x_0,y)$,则 $f'_y(x_0,y_0)$ 表示上述交线在点 M 处的切线对 y 轴的斜率.

3. 高阶偏导数

定义 如果 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 仍然存在偏导数,则称之为函数 $f(x,y)$ 的**二阶偏导数**,常记为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} 或 f''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} 或 f''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} 或 f''_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} 或 f''_{yy},$$

常称$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$为**混合偏导数**.

定理 如果函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$在区域$D$内连续,则在该区域内这两个混合偏导数必定相等.

对于二元以上的函数,也可以类似地定义二阶或更高阶偏导数,且二阶与高阶混合偏导数连续时,混合偏导数的值与求导次序无关.

四、全微分

定义(全微分) 如果函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的全增量

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中A,B与$\Delta x,\Delta y$无关,$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,则称函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处可微,而$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处的**全微分**,记为

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y.$$

如果$f(x,y)$在区域D内的每一点(x,y)都可微分,则称$f(x,y)$在D内可微分.

定理(全微分存在的必要条件) 如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处可微,则该函数在点(x,y)处的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$必定存在,且

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

用定义判定$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的可微性分以下两步:

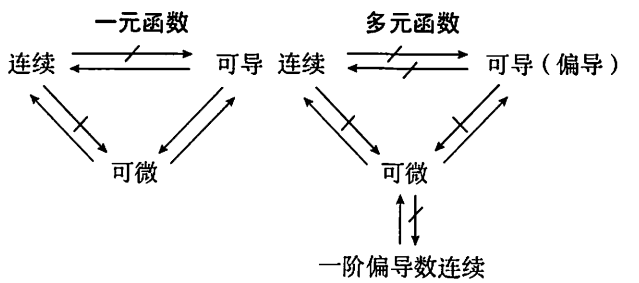
(1) $f'_x(x_0,y_0)$与$f'_y(x_0,y_0)$是否都存在?

(2) $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]-[f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

是否为零?

定理(全微分存在的充分条件) 如果$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x_0,y_0)$处连续,则函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处可微.

连续、可偏导及可微之间的关系



常考题型与典型例题

常考题型

多元函数连续、偏导数、全微分的概念及其之间的关系

【例 3】 (1997,数一) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处

(A) 连续、偏导数存在.　　(B) 连续、偏导数不存在.

(C) 不连续、偏导数存在.　　(D) 不连续、偏导数不存在.

【C】

【例 4】 (1994,数一、二) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ 存在,是 $f(x,y)$ 在该点连续的

(A) 充分而非必要条件.　　(B) 必要而非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.

【D】

【例 5】 (2012,数三) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$,则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$ _____.

解

由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$ 得, $f(0,1)=1$,且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{[f(x,y)-f(0,1)]-[2x-(y-1)]}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0,$$

即 $$\Delta z=f(x,y)-f(0,1)=2x-(y-1)+o(\rho),$$

则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

【例 6】 证明以下几个经典的反例.

(1) $f(x,y)=|x|+|y|$ 在 $(0,0)$ 点连续,但不可导(也不可微).

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点可导,但不连续.

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点可导,但不可微.

(4) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点可微,但偏导数不连续.

证

(1) 由于

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(|x|+|y|)=0=f(0,0),$$

则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

又 $f(x,0)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导,则 $f'_x(0,0)$ 不存在,由对称性知 $f'_y(0,0)$ 也不存在,故 $f(x,y)=|x|+|y|$ 在 $(0,0)$ 点连续,但不可导,因此也不可微.

(2) 由于

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{0-0}{\Delta x}=0.$$

由对称性知 $f'_y(0,0)=0$,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可导,又

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在,从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

(3) 由于

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{0-0}{\Delta x}=0.$$

同理 $f'_y(0,0)=0$,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可导,但

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)]-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

由(2)可知该极限不存在,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

(4) 由于

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}=0.$$

同理 $f'_y(0,0)=0$. 又

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)]-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0,$$

则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微. 又当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时

$$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$, 而 $\lim\limits_{\substack{y=0\\ x\to 0}}\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ 不存在,

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ 不存在, 从而有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f'_x(x,y)$ 不存在, 则 $f'_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续, 即偏导数不连续.

【例 7】 (2017, 数二) 设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数, 且对任意的 (x,y) 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, 则

(A) $f(0,0)>f(1,1)$.　　(B) $f(0,0)<f(1,1)$.

(C) $f(0,1)>f(1,0)$.　　(D) $f(0,1)<f(1,0)$.

解

【方法 1】 直接法

由于 $f(1,0)-f(0,1)=[f(1,0)-f(0,0)]-[f(0,1)-f(0,0)]$

$$=f'_x(\xi,0)-f'_y(0,\eta)\ (0<\xi<1,0<\eta<1).$$

由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$ 知, $f'_x(\xi,0)>0$, 由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 知 $f'_y(0,\eta)<0$, 则

$$f'_x(\xi,0)-f'_y(0,\eta)>0,$$

即 $f(1,0)-f(0,1)>0$, 故 $f(1,0)>f(0,1)$. 选(D).

【方法 2】 排除法

令 $f(x,y)=x-y$，则 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=1>0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-1<0$ 符合题设条件，而

$$f(0,0)=0, f(1,1)=0, f(0,1)=-1, f(1,0)=1,$$

则排除(A)(B)(C)，故应选(D).

第二节 多元函数的微分法

考试内容概要

一、复合函数微分法

定理 设函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 处有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

全微分形式的不变性

设函数 $z=f(u,v)$，$u=u(x,y)$ 及 $v=v(x,y)$ 都有连续的一阶偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 的全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v,$$

即：不论把函数 z 看做自变量 x,y 的函数，还是看作中间变量 u,v 的函数，函数 z 的全微分形式都是一样的.

二、隐函数微分法

(1) 由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$

若函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域可唯一确定一个有连续导数的函数 $y=f(x)$，并有

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

(2) 由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$

若函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域可唯一确定一个有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}.$$

(3) 由方程组$\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=0,\\F_2(x,y,u,v)=0\end{cases}$确定的隐函数$u=u(x,y),v=v(x,y)$(仅数一要求)

欲求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$,可以将每个方程分别对$x$求偏导数,得出以$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$为变量的方程组,可解得$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$.同样,可以将每个方程分别对$y$求偏导数,得出以$\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$为变量的方程组,可解得$\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$.

常考题型与典型例题

常考题型

复合函数及隐函数的偏导数和全微分的计算

一、复合函数偏导数与全微分

【例 1】 (2011,数一) 设函数$F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$,则$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$_____.

解

【方法 1】 $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y\sin xy}{1+x^2y^2}$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{y^2\cos(xy)(1+x^2y^2)-2xy^3\sin xy}{(1+x^2y^2)^2},$$

故$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=4$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【方法 2】 $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y\sin xy}{1+x^2y^2}$,$F_x'(x,2)=\frac{2\sin 2x}{1+4x^2}$.

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=F_{xx}''(0,2)=\lim_{x\to 0}\frac{F_x'(x,2)-F_x'(0,2)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{x(1+4x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x(1+4x^2)}=4.$$

【例 2】 (2011,数三) 设函数$z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$,则$\mathrm{d}z|_{(1,1)}=$_____.

【$(1+2\ln 2)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$】

【例 3】（2007，数一）设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ _____.

【$yx^{y-1}f_1'+y^x\ln y f_2'$】

【例 4】（2017，数一、二）设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续导数，$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_1'\cdot\mathrm{e}^x+f_2'(-\sin x),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{e}^xf_1'+\mathrm{e}^x[f_{11}''\mathrm{e}^x+f_{12}''(-\sin x)]-\cos xf_2'-\sin x[f_{21}''\mathrm{e}^x+f_{22}''(-\sin x)],$$

$$\text{则}\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f_1'(1,1),\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)-f_2'(1,1).$$

【例 5】（2019，数三）设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，函数 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$，求 $\dfrac{\partial^2g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2g}{\partial y^2}$.

解

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-(f_1'+f_2')=y-f_1'-f_2',$$

$$\frac{\partial^2g}{\partial x^2}=-(f_{11}''+f_{12}'')-(f_{21}''+f_{22}'')=-(f_{11}''+2f_{12}''+f_{22}''),$$

$$\frac{\partial^2g}{\partial x\partial y}=1-(f_{11}''-f_{12}'')-(f_{21}''-f_{22}'')=1-f_{11}''+f_{22}'',$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x-(f_1'-f_2')=x-f_1'+f_2',$$

$$\frac{\partial^2g}{\partial y^2}=-(f_{11}''-f_{12}'')+(f_{21}''-f_{22}'')=-f_{11}''+2f_{12}''-f_{22}'',$$

$$\text{则}\frac{\partial^2g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2g}{\partial y^2}=1-3f_{11}''-f_{22}''.$$

【例 6】（2009，数二）设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$.

解

由于$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+f'_2+yf'_3$,$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_1-f'_2+xf'_3$,所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(f'_1+f'_2+yf'_3)dx+(f'_1-f'_2+xf'_3)dy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}-f''_{12}+xf''_{13}+f''_{21}-f''_{22}+xf''_{23}+f'_3+y(f''_{31}-f''_{32}+xf''_{33})$$

$$=f''_{11}+(x+y)f''_{13}-f''_{22}+(x-y)f''_{23}+xyf''_{33}+f'_3.$$

【例 7】 (2011,数一、二) 设函数 $z=f(xy,yg(x))$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

解

【方法 1】 由 $z=f(xy,yg(x))$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+yg'(x)f'_2.$$

上式两端对 y 求偏导得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y[xf''_{11}+g(x)f''_{12}]+g'(x)f'_2+yg'(x)[xf''_{21}+g(x)f''_{22}].$$

由题意 $g(1)=1,g'(1)=0$,在上式中令 $x=1,y=1$ 得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f'_1(1,1)+f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1).$$

【方法 2】 由 $z=f(xy,yg(x))$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+yg'(x)f'_2.$$

由题意 $g(1)=1,g'(1)=0$,在上式中令 $x=1$ 得

$$z'_x(1,y)=yf'_1(y,y).$$

上式两端对 y 求偏导得

$$z''_{xy}(1,y)=f'_1(y,y)+y[f''_{11}(y,y)+f''_{12}(y,y)].$$

令 $y=1$ 得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f'_1(1,1)+f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1).$$

【例 8】 (2014,数一、二) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}.$$

若 $f(0)=0,f'(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式.

解

令 $e^x\cos y=u$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\cos y$,$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)e^x\sin y$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)e^{2x}\cos^2 y + f'(u)e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x}\sin^2 y - f'(u)e^x\cos y.$$

将以上两个式子代入$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x\cos y)e^{2x}$得

$$f''(u) = 4f(u) + u,$$

即 $f''(u) - 4f(u) = u.$

此方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 - 4 = 0$,特征根为 $r = \pm 2$,齐次方程的通解为

$$f(u) = C_1e^{2u} + C_2e^{-2u}.$$

设非齐次方程的特解为 $f^* = au + b$,代入非齐次方程得 $a = -\frac{1}{4}, b = 0.$

则原方程的通解为 $f(u) = C_1e^{2u} + C_2e^{-2u} - \frac{1}{4}u.$

由 $f(0) = 0, f'(0) = 0$ 得 $C_1 = \frac{1}{16}, C_2 = -\frac{1}{16}$,则

$$f(u) = \frac{1}{16}(e^{2u} - e^{-2u} - 4u).$$

二、隐函数偏导数与全微分

【例 9】 (2015,数二、三)若函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定,则 $dz|_{(0,0)} =$ _____.

解

【方法 1】 将 $x = 0, y = 0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中得 $e^{3z} = 1$,则 $z = 0.$

方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 两端微分得

$$e^{x+2y+3z}(dx + 2dy + 3dz) + yzdx + xzdy + xydz = 0.$$

将 $x = 0, y = 0, z = 0$ 代入上式得

$$dx + 2dy + 3dz = 0,$$

则 $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx + 2dy).$

【方法 2】 将 $x = 0, y = 0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中得 $e^{3z} = 1$,则 $z = 0.$

$$dz|_{(0,0)} = z'_x(0,0)dx + z'_y(0,0)dy.$$

在 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中令 $y = 0$ 得,$e^{x+3z} = 1$,两边对 x 求导得

$$e^{x+3z}(1 + 3z'_x) = 0,$$

$$z'_x(0,0) = -\frac{1}{3}.$$

在 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中令 $x=0$ 得，$e^{2y+3z}=1$，两边对 y 求导得

$$e^{2y+3z}(2+3z'_y)=0,$$

$$z'_y(0,0)=-\frac{2}{3}.$$

则 $dz|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}(dx+2dy)$.

【例 10】（1988，数四）已知 $u+e^u=xy$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解

等式 $u+e^u=xy$ 两端对 x 求偏导得

$$(1+e^u)\frac{\partial u}{\partial x}=y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{1+e^u}.$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{1+e^u}.$$

等式 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{1+e^u}$ 两端对 y 求偏导得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{(1+e^u)-e^u\frac{\partial u}{\partial y}y}{(1+e^u)^2}=\frac{1}{1+e^u}-\frac{xye^u}{(1+e^u)^3}.$$

【例 11】（2010，数一、二）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F'_2\neq 0$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$

(A) x.　　(B) z.　　(C) $-x$.　　(D) $-z$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-\frac{y}{x^2}F'_1-\frac{z}{x^2}F'_2}{\frac{1}{x}F'_2},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{1}{x}F'_1}{\frac{1}{x}F'_2},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-\frac{y}{x}F'_1-\frac{z}{x}F'_2}{\frac{1}{x}F'_2}-\frac{\frac{y}{x}F'_1}{\frac{1}{x}F'_2}=z.$$

故应选(B).

【例 12】（2001，数三）设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：

$$e^{xy}-xy=2 \quad 和 \quad e^{x}=\int_{0}^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt.$$

求$\frac{du}{dx}$.

解

【方法 1】
$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \tag{①}$$

由 $e^{xy}-xy=2$ 两边对 x 求导,得

$$e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

即$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$.

又由 $e^{x}=\int_{0}^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$ 两边对 x 求导,得 $e^{x}=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\cdot\left(1-\frac{dz}{dx}\right)$,即

$$\frac{dz}{dx}=1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}.$$

将其代入 ① 式,得

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}.$$

【方法 2】
$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz. \tag{②}$$

等式 $e^{xy}-xy=2$ 两端微分得

$$e^{xy}(ydx+xdy)-(ydx+xdy)=0,$$

$$dy=-\frac{y}{x}dx.$$

等式 $e^{x}=\int_{0}^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$ 两端微分得 $e^{x}dx=\frac{\sin(x-z)}{x-z}(dx-dz)$,即

$$dz=\left(1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right)dx.$$

将其代入 ② 式,得

$$du=\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left(1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right)\frac{\partial f}{\partial z}\right]dx,$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left(1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

【例 13】 (2008,数三) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^{2}+y^{2}-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数,其中 φ 具有二阶导数,且 $\varphi'\neq-1$.

(1) 求 dz;

(2) 记 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$,求$\frac{\partial u}{\partial x}$.

解

【方法 1】 (1) 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z-\varphi(x+y+z)$，则

$$F'_x=2x-\varphi',F'_y=2y-\varphi',F'_z=-1-\varphi'.$$

由公式 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}.$$

所以

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{(2x-\varphi')\mathrm{d}x+(2y-\varphi')\mathrm{d}y}{1+\varphi'}.$$

(2) 由于 $u(x,y)=\frac{2}{1+\varphi'}$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2}{(1+\varphi')^2}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\varphi''=-\frac{2(2x+1)\varphi''}{(1+\varphi')^3}.$$

【方法 2】 (1) 对等式 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 两端求微分，得

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\varphi'\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z),$$

解出 $\mathrm{d}z$，得

$$\mathrm{d}z=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}x+\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}y.$$

(2) 同解 1.

第三节 多元函数的极值与最值

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

考试内容概要

一、无约束极值

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，若对该邻域内任意的点 $P(x,y)$ 均有

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)(\text{或 } f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)),$$

则称 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极大值点(或极小值点)；称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的极大值(或极小值). 极大值点和极小值点统称为**极值点**，极大值和极小值统称为**极值**.

定理 (**极值的必要条件**) 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数，且 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极值点，则

$$f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0.$$

定理 (**极值的充分条件**) 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有二阶连续偏导数，又 $f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0$. 记

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0),$$

则有下述结论：

(1) 若 $AC - B^2 > 0$，则(x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极值点.

①$A < 0$，则(x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极大值点.

②$A > 0$，则(x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极小值点.

(2) 若 $AC - B^2 < 0$，则(x_0, y_0) 不为 $f(x, y)$ 的极值点.

(3) 若 $AC - B^2 = 0$，则(x_0, y_0) 可能为 $f(x, y)$ 的极值点，也可能不为 $f(x, y)$ 的极值点(此时，一般用定义判定).

求具有二阶连续偏导数的二元函数 $z = f(x, y)$ 极值的一般步骤为：

(1) 求出 $f(x, y)$ 的驻点 $P_1, \cdots, P_k$；

(2) 利用极值的充分条件判定驻点 P_i 是否为极值点.

【注】 (1) 二元函数 $z = f(x, y)$ 在偏导数不存在的点也可能取到极值(如 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$)，而这种点是否取得极值一般用极值定义判定；

(2) 二元函数 $z = f(x, y)$ 可能取得极值的点就两种，驻点和偏导数不存在的点.

二、条件极值及拉格朗日乘数法

求 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的条件极值的一般方法为：

(1) 构造拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$.

(2) 将 $F(x, y, \lambda)$ 分别对 x, y, λ 求偏导数，构造方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

解出 x, y 及 λ，则其中(x, y) 就是函数 $f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点.

以上方法可推广到对于 n 元函数在 m 个约束条件下的极值问题，如求 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$ 下的极值，可构造拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f + \lambda\varphi + \mu\psi.$$

对 F 的 x, y, z, λ, μ 分别求偏导数，并构造方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) + \lambda\varphi'_x(x, y, z) + \mu\psi'_x(x, y, z) = 0, \\ f'_y(x, y, z) + \lambda\varphi'_y(x, y, z) + \mu\psi'_y(x, y, z) = 0, \\ f'_z(x, y, z) + \lambda\varphi'_z(x, y, z) + \mu\psi'_z(x, y, z) = 0, \\ \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

解出 x, y, z, λ 及 μ，则其中(x, y, z) 就是可能的极值点.

对于实际问题，如果驻点唯一，且由实际意义知问题存在最大(小)值，则该驻点即为最大(小)值点. 如果存在多个驻点，且由实际意义知道问题既存在最大值也存在最小值，只需比较各驻点处的函数值，最大的则为最大值，最小的则为最小值.

三、最大最小值

最大最小值常见有两种问题

1. 求连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上的最大最小值

常用如下方法，即三部曲：

(1) 求 $f(x,y)$ 在 D 内部可能的极值点.

(2) 求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大最小值.

(3) 比较.

2. 应用题

首先将要求最大或最小的变量用一个多元函数表示出来，即建立目标函数 $z=f(x,y)$，然后按照 1 的三部曲求解.

常考题型与典型例题

常考题型

1. 求极值(无条件)
2. 求连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的最大最小值
3. 最大最小值应用题

【例 1】 (2003，数三) 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.

(B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.

(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

【A】

【例 2】 (2009，数二) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，则点 $(0,0)$

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.　　(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.　　(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

解

【方法 1】 充分条件.

【方法 2】 求出 $f(x,y)$.

【方法 3】 排除法. 【D】

【例 3】 (2017,数三) 二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是

(A)(0,0). (B)(0,3). (C)(3,0). (D)(1,1).

解

由 $\begin{cases} z'_x = y(3-2x-y)=0, \\ z'_y = x(3-2y-x)=0 \end{cases}$ 得驻点(0,0),(0,3),(3,0),(1,1).

$$z''_{xx}=-2y, z''_{yy}=-2x, z''_{xy}=3-2x-2y.$$

在(0,0)点,$AC-B^2=-9<0$,无极值;

在(0,3)点,$AC-B^2=-9<0$,无极值;

在(3,0)点,$AC-B^2=-9<0$,无极值;

在(1,1)点,$AC-B^2=3>0$,有极值.

故应选(D).

【例 4】 (2009,数一、三) 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

解

$f'_x(x,y)=2x(2+y^2)$, $f'_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1$.

令 $\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$ 解得唯一驻点 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$. 由于

$$A=f''_{xx}\left(0,\frac{1}{e}\right)=2(2+y^2)\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=2\left(2+\frac{1}{e^2}\right),$$

$$B=f''_{xy}\left(0,\frac{1}{e}\right)=4xy\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=0,$$

$$C=f''_{yy}\left(0,\frac{1}{e}\right)=\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=e,$$

所以 $AC-B^2=2e\left(2+\frac{1}{e^2}\right)>0$,且 $A>0$. 从而 $f\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值,极小值为 $f\left(0,\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

【例 5】 (2008,数二) 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值.

解

作拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4).$$

令

$$\begin{cases} F'_x=2x+2\lambda x+\mu=0, \\ F'_y=2y+2\lambda y+\mu=0, \\ F'_z=2z-\lambda+\mu=0, \\ F'_\lambda=x^2+y^2-z=0, \\ F'_\mu=x+y+z-4=0, \end{cases}$$

解方程组,得 $(x_1,y_1,z_1)=(1,1,2)$, $(x_2,y_2,z_2)=(-2,-2,8)$.

故所求的最大值为 72,最小值为 6.

【例 6】 (2005,数二) 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$,并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

解

【方法 1】 由 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$ 可知

$$z=f(x,y)=x^2-y^2+C.$$

再由 $f(1,1)=2$,得 $C=2$,故

$$z=f(x,y)=x^2-y^2+2.$$

令 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x=0$,$\frac{\partial f}{\partial y}=-2y=0$,解得驻点(0,0).

在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上,$z=x^2-(4-4x^2)+2$,即

$$z=5x^2-2(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

其最大值为 $z|_{x=\pm 1}=3$,最小值为 $z|_{x=0}=-2$. 再与 $f(0,0)=2$ 比较,可知 $f(x,y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3,最小值为 -2.

【方法 2】 同解 1,得驻点(0,0). 用拉格朗日乘数法求此函数在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的极值.

设 $L=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$,令

$$\begin{cases}L'_x=2x+2\lambda x=0,\\ L'_y=-2y+\frac{\lambda}{2}y=0,\\ L'_\lambda=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0,\end{cases}$$

解得 4 个可能的极值点(0,2),(0,-2),(1,0) 和(-1,0).

又 $f(0,2)=-2$,$f(0,-2)=-2$,$f(1,0)=3$,$f(-1,0)=3$,再与 $f(0,0)=2$ 比较,得 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 3,最小值为 -2.

【方法 3】 同解 1,得驻点(0,0).

椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 的参数方程为 $x=\cos t$,$y=2\sin t$.

$$z=x^2-y^2+2=\cos^2 t-4\sin^2 t+2=3-5\sin^2 t.$$

故 $f_{\max}=3$,$f_{\min}=-2$.

第九章　二重积分

大纲考试内容	大纲考试要求		
	数一	数二	数三
二重积分的基本性质	了解	了解	了解
二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标)	掌握	掌握	掌握
二重积分的中值定理	了解	了解	了解
无界区域上较简单的反常二重积分			了解并会计算

考试内容概要

一、二重积分的概念及性质

1. 二重积分的概念

定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有定义，将区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n,$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域，也表示它的面积. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 记 λ 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$ 中的最大直径，如果 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的**二重积分**，记为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

几何意义

二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 是一个数. 当 $f(x,y)\geqslant0$ 时，其值等于以区域 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积；当 $f(x,y)\leqslant0$ 时，二重积分的值为负值，其绝对值等于上述曲顶柱体的体积.

2. 二重积分的性质

性质 1（不等式性质）

(1) 若在 D 上 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 若在 D 上 $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$,则

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma,\text{其中 }\sigma\text{ 为区域 }D\text{ 的面积.}$$

(3) $\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$

性质 2(中值定理)

设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续,σ 为区域 D 的面积,则在 D 上至少存在一点 (ξ,η),使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma.$$

二、二重积分的计算

1. 利用直角坐标计算

(1) 先 y 后 x　积分区域 D 可以用 $a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$ 表示,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) 先 x 后 y　积分区域 D 可以用 $c \leqslant y \leqslant d, \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$ 表示,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

2. 利用极坐标计算

先 r 后 θ　积分区域 D 可以用 $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \varphi_1(\theta) \leqslant r \leqslant \varphi_2(\theta)$ 表示,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r.$$

微信公众号: djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【注】 适合用极坐标计算的二重积分的特征:

(1) 适合用极坐标计算的被积函数:$f(\sqrt{x^2+y^2})$, $f(\frac{y}{x})$, $f(\frac{x}{y})$;

(2) 适合用极坐标的积分域:

如 $x^2+y^2 \leqslant R^2$; $r^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant R^2$; $x^2+y^2 \leqslant 2ax$; $x^2+y^2 \leqslant 2by$.

3. 利用函数的奇偶性计算

(1) 若积分域 D 关于 y 轴对称,$f(x,y)$ 关于 x 有奇偶性,则:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_{x\geqslant 0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)\text{ 关于 }x\text{ 为偶函数,} \\ 0, & f(x,y)\text{ 关于 }x\text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

(2) 若积分域 D 关于 x 轴对称,$f(x,y)$ 关于 y 有奇偶性,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_{y\geqslant 0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)\text{ 关于 }y\text{ 为偶函数},\\ 0, & f(x,y)\text{ 关于 }y\text{ 为奇函数}.\end{cases}$$

4. 利用变量的轮换对称性计算

如果积分域 D 具有轮换对称性，也就是关于直线 $y=x$ 对称，即 D 的表达式中将 x 换作 y，y 换作 x 表达式不变，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma.$$

常考题型与典型例题

常考题型

1. 累次积分交换次序或计算
2. 二重积分计算

一、累次积分交换次序或计算

【例 1】 交换累次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 的次序.

解

首先画域，y 应介于 $y=x^2$ 与 $y=2-x$ 之间，x 介于 0 与 1 之间，如图 1，则

$$\text{原式}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

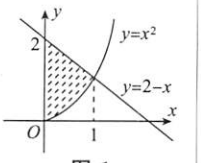


图 1

【例 2】 (2009，数二) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$

(A) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^{4-x}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^{4-x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 f(x,y)\mathrm{d}x$.

【C】

【例 3】 (1996,数三) 累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 可以写成

(A) $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$.　　(B) $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$.

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$.　　(D) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$.

解

首先画域,r 应介于 $r=0$ 与 $r=\cos\theta$(即 $x^2+y^2=x$) 之间,θ 应介于 0 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间,如图 2. 则

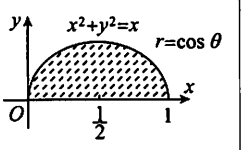


图 2

$$\text{原式}=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy.$$

故应选(D).

【例 4】 (2017,数二) 积分$\int_0^1 dy\int_y^1\frac{\tan x}{x}dx=$ _____.

【$-\ln\cos 1$】

【例 5】 积分$\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy=$ _____.

解

该累次积分在直角坐标下都不易计算,因此在极坐标下计算,其积分域如图 3. 则

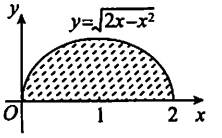


图 3

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{9}.$$

二、二重积分计算

【例 6】 (2008,数三) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,则$\iint\limits_D (x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ _____.

解

y 关于 y 为奇函数,积分域关于 x 轴上下对称,则$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

$$\text{原式}=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{(变量对称性)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

【例 7】 (1991,数一、二) 设 D 是 xOy 平面上以(1,1),(−1,1) 和(−1,−1) 为顶点的三角形区域,D_1 是 D 在第一象限的部分,则$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于

(A)$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(B)$2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C)$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(D)0.

【A】

【例 8】 (2006,数三) 计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{y^2-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $y=x,y=1,x=0$ 所围成的平面区域.(如图 4)

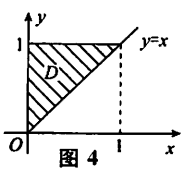


图 4

解

$$\text{原式}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{y^2-xy}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{2}{3}\sqrt{y}\,(y-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^y\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^1 y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{9}.$$

【例 9】 (2017,数二) 已知平面域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$,计算二重积分

$$I=\iint\limits_D (x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解

$$I=\iint_D(x^2+2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 D 关于 y 轴对称，且函数 $2x$ 是 x 的奇函数，所以 $\iint_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

$$\begin{aligned}I&=\iint_D(x^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r+\pi\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta+\pi=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta+\pi\\&=8\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\pi\\&=\frac{5}{4}\pi.\end{aligned}$$

【例 10】 (2005，数二、三) 计算二重积分 $\iint_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma$，其中

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$$

解

如图 5 所示，将 D 分成 D_1 与 D_2 两部分.

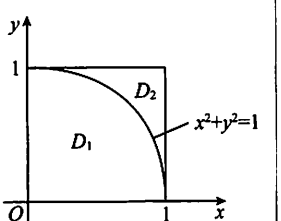


图 5

$$\begin{aligned}&\iint_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma\\&=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma\\&=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma+\left[\iint_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma\right]\\&=2\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

由于

$$\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8},$$

$$\iint_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x^2-\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3},$$

因此 $\iint_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$.

【例 11】 (2014，数二、三) 设平面域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，计算

$$\iint_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解

【方法 1】 由于积分域 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left[\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\sin(\pi r)r\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{1}{4}\int_1^2 r\mathrm{d}\cos(\pi r)=-\frac{3}{4}.$$

【方法 2】 $\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\cdot\int_1^2 r\sin(\pi r)\mathrm{d}r.$

由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_1^2 r\sin(\pi r)\mathrm{d}r=\frac{1}{\pi}(-r\cos\pi r+\frac{1}{\pi}\sin\pi r)\Big|_1^2=-\frac{3}{\pi},$$

故 $\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{4}.$

【例 12】 (2013，数二、三) 设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(k=1,2,3,4)$，则

(A) $I_1>0$.　　(B) $I_2>0$.

(C) $I_3>0$.　　(D) $I_4>0$.

【B】

第十章　无穷级数

大纲考试内容	大纲考试要求	
	数一	数三
常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念 级数的基本性质及收敛的必要条件	理解	理解
交错级数的莱布尼茨判别法	掌握	掌握
几何级数、p 级数的收敛与发散的条件 正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法、根式判别法	掌握	掌握
任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念 绝对收敛与收敛的关系 幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分)	了解	了解
幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法	掌握	掌握
函数项级数的收敛域及和函数的概念	了解	
幂级数收敛半径的概念	理解	
一些幂级数在收敛区间内的和函数,并会由此求出某些数项级数的和	会求	会求
e^x,$\sin x$,$\cos x$,$\ln(1+x)$ 及 $(1+x)^a$ 的麦克劳林(Maclaurin)展开式,会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数	掌握	掌握
傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理	了解	
将定义在$[-l,l]$上的函数展开为傅里叶级数 将定义在$[0,l]$上的函数展开为正弦级数与余弦级数 写出傅里叶级数的和函数的表达式	会	
积分判别法	会用	会用

第一节　常数项级数

考试内容概要

一、级数的概念与性质

1. 级数的概念

设$\{u_n\}$是一数列，则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

称为**无穷级数**，简称**级数**. $S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$ 称为级数的**部分和**. 若部分和数列$\{S_n\}$有极限S，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**收敛**，并称这个极限值$S$为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的**和**，记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$. 如果极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**发散**.

【例 1】　判定下列级数敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$；　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n(a\neq 0)$.

解

(1) $S_n=\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$发散.

(2) $S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1,\\ na, & q=1.\end{cases}$

当$|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}$，原级数收敛；

当$|q|>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，原级数发散；

当$q=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}na=\infty$，原级数发散；

当$q=-1$时，$S_n=a-a+a-\cdots+(-1)^{n-1}a=\begin{cases}a, & n\text{为奇数},\\ 0, & n\text{为偶数},\end{cases}$ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，原级数发散.

综上所述，原级数$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n(a\neq 0)$在$|q|<1$时收敛，在$|q|\geqslant 1$时发散.

2. 级数的性质

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也收敛，且其和为 kS.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 分别收敛于 S,T，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 收敛于 $S\pm T$.

【注】 ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 必发散；

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 敛散性不定.

(3) 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性.

【注】 一个级数的敛散性与其前有限项无关.

(4) 收敛级数加括号仍收敛且和不变.

【注】 ① 若级数加括号以后收敛，原级数不一定收敛；

② 若级数加括号以后发散，则原级数一定发散.

(5)(级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

【注】 ① 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 不一定收敛；

② 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定发散.

二、级数的审敛准则

1. 正项级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n,u_n\geqslant 0\right)$

基本定理：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow\{S_n\}$ 上有界.

(1) **比较判别法**：设 $u_n\leqslant v_n$，则

$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

(2) **比较法极限形式**：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l(0\leqslant l\leqslant+\infty)$，

① 若 $0<l<+\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散.

② 若 $l=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

③ 若 $l=+\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛.

【注】 使用比较法和比较法的极限形式时，需要适当地选择一个已知其敛散性的级数作为比较的基准. 最常用的是 p 级数和等比级数.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$　当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$，其中 a 和 q 为正数　当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant 1$ 时发散.

(3) **比值法**：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\text{收敛}, & \rho<1,\\ \text{发散}, & \rho>1,\\ \text{不一定}, & \rho=1.\end{cases}$

(4) **根值法**：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\text{收敛}, & \rho<1,\\ \text{发散}, & \rho>1,\\ \text{不一定}, & \rho=1.\end{cases}$

(5) **积分判别法**：设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上单调减、非负的连续函数，且 $a_n=f(n)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

【例 2】　证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

证

当 $p>0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调减、非负且连续.

$$\frac{1}{n^p}=f(n),$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 与积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 同敛散，而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $0<p\leqslant 1$ 时发散.

又，当 $p\leqslant 0$ 时，

$$a_n=\frac{1}{n^p}\not\to 0,$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 也发散，原题得证.

【例 3】　判定级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 的敛散性.

解

由于 $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ 是 $[2,+\infty)$ 上单调减、非负的连续函数，且

$$\frac{1}{n\ln n}=f(n),$$

则级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 与积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ 同敛散. 又

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=\infty,$$

则该积分发散，由积分判别法知原级数发散.

2. 交错级数($\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n>0$)

莱布尼茨准则:若(1)$\{u_n\}$单调减;(2)$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛.

【注】 $\{u_n\}$单调减,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$是级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛的充分条件,但非必要条件.

如交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}}$收敛,但$u_n=\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$并不递减.

3. 任意项级数($\sum_{n=1}^{\infty}u_n, u_n$为任意实数)

绝对收敛与条件收敛概念

(1) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛,此时称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛.

(2) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,但$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,此时称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛.

绝对收敛和条件收敛的基本结论

(1) 绝对收敛的级数一定收敛,即$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(2) 条件收敛的级数的所有正项(或负项)构成的级数一定发散.

即:$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+|u_n|}{2}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n-|u_n|}{2}$发散.

常考题型与典型例题

常考题型

常数项级数的敛散性判定

【例 4】 (2015,数三)下列级数中发散的是

(A)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

(B)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(C)$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$.

(D)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

解

【方法 1】 直接法 选(C).

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$$

由于$u_n=\frac{1}{\ln n}$单调减且趋于0,由莱布尼茨准则知级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$收敛.又

$$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由正项级数比较判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，则原级数发散.

【方法 2】 排除法

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3}=\frac{1}{3}<1$，由根值法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 收敛.

由于 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 同敛散. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{n!}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1\end{aligned}$$

由比值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛，故应选(C).

【例 5】 (2013，数三) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是

(A) 若 $a_n>a_{n+1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n>a_{n+1}$.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pa_n$ 存在.

(D) 若存在常数 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pa_n$ 存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

【D】

【例 6】 (2009,数一) 设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$,若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则

(A) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛. (B) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散.

(C) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛. (D) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$发散.

解

【方法 1】 直接法

由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则存在$M$,使得对一切的$n$有

$$|a_n|\leqslant M.$$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|\to 0$,从而当$n$充分大时,$|b_n|<1$,从而有

$$b_n^2\leqslant|b_n|.$$

由此可知

$$a_n^2b_n^2\leqslant M^2|b_n|.$$

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛,故应选(C).

【方法 2】 排除法

令$a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}},b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,显然$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,则排除(A).

令$a_n=\dfrac{1}{n},b_n=\dfrac{1}{n}$,显然有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$也发散,但

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},$$

都收敛,则排除(B)(D),故应选(C).

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【例 7】 (2011,数三) 设$\{u_n\}$是数列,则下列命题正确的是

(A) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛. (B) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(C) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛. (D) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

【A】

第二节　幂级数

考试内容概要

一、幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域

定义　形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

或者

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

的函数项级数称为**幂级数**.

定理(阿贝尔定理)

(1) 若$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0(x_0\neq 0)$处收敛,则当$|x|<|x_0|$时,$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛.

(2) 若$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0$处发散,则当$|x|>|x_0|$时,$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散.

定理　幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛性有且仅有以下三种可能:

(1) 对任何$x\in(-\infty,+\infty)$都收敛;

(2) 仅在$x=0$处收敛;

(3) 存在一个正数R,当$|x|<R$时绝对收敛,当$|x|>R$时发散.

定义　上述定理中的正数R称为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的**收敛半径**.开区间$(-R,R)$称为它的**收敛区间**.若再考察$x=\pm R$时$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛性,可得出该级数收敛点的全体,称之为**收敛域**.

【注】　若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$x=x_0$处条件收敛,则点$x_0$必为该幂级数收敛区间$(-R,R)$的一个端点.

定理　如果$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$,则$R=\dfrac{1}{\rho}$.

定理　如果$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$,则$R=\dfrac{1}{\rho}$.

二、幂级数的性质

1. 有理运算性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R_1，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径为 R_2，令 $R=\min\{R_1,R_2\}$，则有

(1) 加法：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n,\quad x\in(-R,R).$

(2) 减法：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n,\quad x\in(-R,R).$

(3) 乘法：$(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n)\cdot(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n)$

$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots,x\in(-R,R).$

(4) 除法：$\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\quad x\in(-R,R),$

其中系数 $c_n(n=0,1,2\cdots)$ 由 $(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n)\cdot(\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 所确定.

2. 分析性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，和函数为 $S(x)$，则

(1) 连续性：$S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内连续.

(2) 可导性：$S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，且可逐项求导，即

$$S'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

求导后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

(3) 可积性：$S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可积，且可逐项积分，即

$$\int_0^xS(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^xa_nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}.$$

积分后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

三、函数的幂级数展开

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上有定义，若

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

对任意的 $x\in(x_0-R,x_0+R)$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上能展开为 $x-x_0$ 的幂级数.

由幂级数的性质可知，如果函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上能展开为 $x-x_0$ 的幂级

数，那么 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上任意阶可导.

定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上能展开为 $x-x_0$ 的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

那么 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上任意阶可导，且其展开式是唯一的，

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=0,1,2,\cdots).$$

定义 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处任意阶可导，则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**泰勒级数**.

特别地，$x_0=0$ 处的泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为函数 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**.

定理 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内任意阶可导，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开为泰勒级数 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

中的余项.

几个常用的展开式

$$(1)\ \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (-1<x<1).$$

$$(2)\ \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n \qquad (-1<x<1).$$

$$(3)\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

$$(4)\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

$$(5)\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

$$(6)\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \qquad (-1<x\leqslant 1).$$

$$(7)\ (1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

$(-1<x<1$，区间端点展开式是否成立由 α 的值确立$)$.

函数展开为幂级数的两种方法

(1) 直接展开法

直接展开法分以下两步进行：

第一步 求出 $f(x)$ 在 x_0 处的各阶导数 $f^{(n)}(x_0)$，并写出 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

第二步　考察$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$是否成立.

(2) **间接展开法**

根据函数展开为幂级数的唯一性，从某些已知函数的展开式出发，利用幂级数的性质(四则运算、逐项求导、逐项积分)及变量代换等方法，求得所给函数的展开式.

【注】　直接展开法分两步，但这两步都比较困难，主要用于一开始推导一些基本展开式(如e^x，$\sin x$)；有了一些基本展开式后，主要用间接展开法.

常考题型与典型例题

常考题型

1. 求收敛半径、收敛区间及收敛域
2. 将函数展开为幂级数
3. 求幂级数(或数项级数)的和

一、求收敛半径、收敛区间及收敛域

【例 1】　(2009，数三) 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$的收敛半径为_____.

解

【方法 1】
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{e^{n+1}-(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{e^n-(-1)^n}{n^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}-(-1)^{n+1}}{e^n-(-1)^n}\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e+\left(\dfrac{-1}{e}\right)^n}{1-\left(\dfrac{-1}{e}\right)^n}=e,$$

则$R=\dfrac{1}{e}$.

【方法 2】
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e^n-(-1)^n}}{\sqrt[n]{n^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e\sqrt[n]{1-\left(\dfrac{-1}{e}\right)^n}}{(\sqrt[n]{n})^2}$$
$$=e,$$

则$R=\dfrac{1}{e}$.

【例 2】 (1995,数一) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$ _____.

【$\sqrt{3}$】

【例 3】 (2000,数一) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛区间,并讨论该区间端点处的收敛性.

解

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[3^n+(-2)^n]n}{[3^{n+1}+(-2)^{n+1}](n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]n}{3\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right](n+1)}=\frac{1}{3},$$

或
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3^n+(-2)^n}\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}}=\frac{1}{3},$$

所以收敛半径为 3,收敛区间为 $(-3,3)$.

当 $x=3$ 时,因为 $\dfrac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{2n}$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,所以原级数在点 $x=3$ 处发散.

当 $x=-3$ 时,由于 $\dfrac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}=(-1)^n\dfrac{1}{n}-\dfrac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}$ 都收敛,所以原级数在点 $x=-3$ 处收敛.

【例 4】 (2008,数一) 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛,在 $x=-4$ 处发散,则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为_____.

【$(1,5]$】

【例 5】 (2015,数一) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的

(A) 收敛点,收敛点. (B) 收敛点,发散点.

(C) 发散点,收敛点. (D) 发散点,发散点.

解

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛可知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛,则 $x=2$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛区间的端点. 又其收敛半径为 1. 由幂级数的性质可知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛半径也为 1.

由于 $|\sqrt{3}-1|<1$,$|3-1|>1$,则 $x=\sqrt{3}$ 为收敛点,$x=3$ 为发散点,故应选(B).

二、将函数展开为幂级数

【例 6】 (2006,数一) 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解

因为 $\dfrac{x}{2+x-x^2}=\dfrac{x}{3}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2-x}\right)$,且

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ |x|<1,$$

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}},\ |x|<2,$$

所以 $\dfrac{x}{2+x-x^2}=\dfrac{x}{3}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2-x}\right)=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1},\ |x|<1.$

【例 7】 (2007,数三) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数,并指出其收敛区间.

解

因为 $\dfrac{1}{x^2-3x-4}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+1}\right)$,

$$\frac{1}{x-4}=\frac{1}{(x-1)-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n,x\in(-2,4),$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x-1)+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n,x\in(-1,3),$$

所以 $\dfrac{1}{x^2-3x-4}=-\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{1}{3^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n,x\in(-1,3).$

【例 8】 将函数 $f(x)=\ln(x^2+x)$ 在 $x=1$ 处展开为幂级数.

【$\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)(x-1)^n, 0<x\leqslant 2$】

【例 9】 将函数 $f(x)=\sin x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处展开为幂级数.

解

$$f(x)=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}\right], x\in(-\infty,+\infty).$$

【例 10】 将函数 $f(x)=\arctan x^2$ 展开成 x 的幂级数.

【$2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n+2}x^{4n+2}, |x|\leqslant 1$】

三、级数求和

【例 11】 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛域及和函数.

【$(-1,1);\dfrac{x}{(1-x)^2}$】

【例 12】 (2017,数一) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$ _____.

解

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n\Big)'=\Big(\frac{x}{1+x}\Big)'=\frac{1}{(1+x)^2}.$$

【例 13】 (2014,数三) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

解

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$, $R=1$, 当 $x=\pm1$ 时原级数显然发散, 则其收敛域为 $(-1,1)$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\\&=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\Big)''+\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\Big)'=\Big(\frac{x^2}{1-x}\Big)''+\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'\\&=\Big(-(x+1)+\frac{1}{1-x}\Big)''+\Big(-1+\frac{1}{1-x}\Big)'\\&=\frac{3-x}{(1-x)^3},x\in(-1,1).\end{aligned}$$

【例 14】 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域及和函数.

微信公众号: djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【$[-1,1]$;$\begin{cases}1+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln(1-x), & -1\leqslant x<1,\text{且}x\neq0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x=1.\end{cases}$】

【注】 常用结论: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$.

【例 15】 (2010,数一) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}=1$,因此幂级数的收敛半径 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$,由莱布尼茨判别法知此级数收敛,因此幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}(-1\leqslant x\leqslant 1)$,则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$$

又 $S(0)=0$,故 $S(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x$,于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS(x)=x\arctan x,x\in[-1,1].$$

第三节　傅里叶级数

考试内容概要

一、傅里叶系数与傅里叶级数

设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积,则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots$$

为 $f(x)$ 的傅里叶系数,称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数.记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

二、收敛定理(狄利克雷)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点,且最多只有有限个极值点,则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛,且收敛于

(1) $S(x)=f(x)$, 当 x 为 $f(x)$ 的连续点.

(2) $S(x)=\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$, 当 x 为 $f(x)$ 的间断点.

(3) $S(x)=\dfrac{f((-\pi)^+)+f(\pi^-)}{2}$, 当 $x=\pm\pi$.

三、周期为 2π 的函数的展开

1. $[-\pi,\pi]$ 上展开

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

2. $[-\pi,\pi]$ 上奇偶函数的展开

(1) $f(x)$ 为奇函数.

$$a_n=0,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

(2) $f(x)$ 为偶函数.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

3. 在 $[0,\pi]$ 上展为正弦或展为余弦

(1) 展为正弦.

$$a_n=0,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

(2) 展为余弦.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

四、周期为 $2l$ 的函数的展开

1. $[-l,l]$ 上展开

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

2. $[-l,l]$ 上奇偶函数的展开

(1) $f(x)$ 为奇函数.

$$a_n = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n = 1,2,\cdots.$$

(2) $f(x)$ 为偶函数.

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = 0, \quad n = 1,2,\cdots.$$

3. 在 $[0,l]$ 上展为正弦或展为余弦

(1) 展为正弦.

$$a_n = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n = 1,2,\cdots.$$

(2) 展为余弦.

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = 0, \quad n = 1,2,\cdots.$$

常考题型与典型例题

常考题型

1. 狄利克雷收敛定理
2. 将函数展开为傅里叶级数

一、狄利克雷收敛定理

【例 1】 (1988,数一) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,它在区间 $(-1,1]$ 上的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leqslant 0, \\ x^3, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶(Fourier) 级数在 $x = 1$ 处收敛于_____.

【$\frac{3}{2}$】

【例 2】 (1989,数一) 设函数 $f(x)=x^2,0\leqslant x<1$,而

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,-\infty<x<+\infty,$$

其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x,n=1,2,3,\cdots$,则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)$等于

(A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{2}$.

【B】

二、将函数展开为傅里叶级数

【例 3】 (1993,数一) 设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则其中系数 b_3 的值为_____.

【$\frac{2}{3}\pi$】

【例 4】 (1991,数一) 将函数 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数,并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解

由于 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 是偶函数,所以

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5,$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2},n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=0,n=1,2,\cdots.$$

因所给函数在区间$[-1,1]$上满足收敛定理的条件,故

$$2+|x|=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

当 $x=0$ 时，$2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$，从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

又 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

【例 5】 (1995，数一) 将 $f(x)=x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

解

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(x-1)\mathrm{d}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,\end{cases}(k=1,2,\cdots).$$

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2},x\in[0,2].$$

第十一章　向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用

大纲考试内容	大纲考试要求 数一
空间直角坐标系 向量的概念及其表示 单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式	理解
向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积) 用坐标表达式进行向量运算的方法 平面方程和直线方程及其求法 方向导数与梯度的计算方法	掌握
两个向量垂直、平行的条件 曲面方程和空间曲线方程的概念 常用二次曲面的方程及其图形 空间曲线的参数方程和一般方程 空间曲线在坐标平面上的投影 空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念	了解
平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角 利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题 点到直线以及点到平面的距离 简单的柱面和旋转曲面的方程 投影曲线的方程 空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的方程	会求

第一节　向量代数

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

考试内容概要

1. 数量积

(1) 几何表示：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha$，$\alpha$ 为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

(2) 代数表示：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

(3) 运算规律：

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$,

分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

(4) 几何应用：

求模：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$,

求夹角：$\cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$,

判定两向量垂直：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

2. 向量积

(1) 几何表示：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一向量.

模：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\alpha$.

方向：右手法则.

(2) 代数表示：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$.

(3) 运算规律：

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$,

分配律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

(4) 几何应用：

求同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

求以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积：$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

判定两向量平行：$\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

3. 混合积

(1) 几何表示：$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

(2) 代数表示：$(\boldsymbol{abc})=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$.

(3) 运算规律：

轮换对称性：$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{bca})=(\boldsymbol{cab})$.

交换变号：$(\boldsymbol{abc})=-(\boldsymbol{acb})$.

(4) 几何应用：

$V_{\text{平行六面体}}=|(\boldsymbol{abc})|$.

判定三向量共面：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow(\boldsymbol{abc})=0$.

常考题型与典型例题

常考题型

向量的运算

【例 1】 (1995) 设$(a\times b)\cdot c=2$,则$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=$_____.

解

$$\begin{aligned}&[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=[a\times b+a\times c+b\times b+b\times c]\cdot(c+a)\\&=(a\times b)\cdot c+(a\times b)\cdot a+(a\times c)\cdot c+(a\times c)\cdot a+(b\times c)\cdot c+(b\times c)\cdot a\\&=(a\times b)\cdot c+(b\times c)\cdot a=2(a\times b)\cdot c=4.\end{aligned}$$

第二节 空间平面与直线

考试内容概要

1. 平面方程

(1) 一般式:$Ax+By+Cz+D=0$, $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$.

(2) 点法式:$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

(3) 截距式:$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

2. 直线方程

(1) 一般式:$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$

(2) 对称式:$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$.

(3) 参数式:$x=x_0+lt,y=y_0+mt,z=z_0+nt$.

3. 平面与直线的位置关系(平行、垂直、夹角)

关键:平面的法线向量,直线的方向向量.

4. 点到面的距离

点(x_0,y_0,z_0)到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

5. 点到直线的距离

点(x_0,y_0,z_0)到直线$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$的距离为

$$d=\frac{|(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)\times(l,m,n)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

常考题型与典型例题

常考题型

建立平面和直线方程

【例1】 (1987)与直线$\begin{cases}x=1,\\ y=-1+t,\\ z=2+t\end{cases}$和$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$都平行,且过原点的平面方程为_____.

【注】 所求平面的法线向量$\boldsymbol{n}$和两直线的方向向量都垂直,故$\boldsymbol{n}=\{1,-1,1\}$.

【$x-y+z=0$】

【例2】 (1990)过点$M(1,2,-1)$且与直线

$$\begin{cases}x=-t+2,\\ y=3t-4,\\ z=t-1\end{cases}$$

垂直的平面方程为_____.

解

由于所求平面与已知直线垂直,则已知直线的方向向量为所求平面的法向量

$$\boldsymbol{n}=\{-1,3,1\}.$$

由点法式方程知所求平面方程为

$$-1\cdot(x-1)+3(y-2)+1\cdot(z+1)=0,$$

即$x-3y-z+4=0$.

【例 3】 (1991) 已知两条直线的方程是

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1},L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1},$$

则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是_____.

【注】 所求平面的法线向量 $\boldsymbol{n}=\{1,0,-1\}\times\{2,1,1\}=\{1,-3,1\}$.

【$x-3y+z+2=0$】

【例 4】 (1993) 设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3,\end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为

(A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

解

L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=\{1,-2,1\}$ 和 $\boldsymbol{s}_2=\{-1,-1,2\}$,

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{1}{2},\theta=\frac{\pi}{3}.$$

【例 5】 (1995) 设有直线

$$L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$$

及平面 $\Pi:4x-2y+z-2=0$,则直线 L

(A) 平行于 Π. (B) 在 Π 上.

(C) 垂直于 Π. (D) 与 Π 斜交.

解

直线 L 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&3&2\\2&-1&-10\end{vmatrix}=\{-28,14,-7\}.$$

平面 Π 的法线向量为

$$\boldsymbol{n}=\{4,-2,1\}.$$

由于 $\dfrac{-28}{4}=\dfrac{14}{-2}=\dfrac{-7}{1}=-7$,则 $\boldsymbol{s}\ /\!/\ \boldsymbol{n}$. 故直线 L 垂直于 Π,选(C).

【例 6】 (1996) 设一平面经过原点及点(6，－3，2)，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程为_____.

【注】 所求平面的法线向量 $\boldsymbol{n}\perp\{4,-1,2\}$，$\boldsymbol{n}\perp\{6,-3,2\}$，取 $\boldsymbol{n}=\{2,2,-3\}$.

【$2x+2y-3z=0$】

【例 7】 (2006) 点(2，1，0) 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$_____.

解

由点到面的距离公式得

$$d=\frac{|3\times2+4\times1+5\times0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\frac{10}{\sqrt{50}}=\sqrt{2}.$$

第三节　曲面与空间曲线

考试内容概要

1. 曲面方程

一般式　$F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$.

2. 空间曲线

(1) 参数式：$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t).\end{cases}$

(2) 一般式：$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$

3. 常见曲面

旋转面：一条平面曲线绕平面上一条直线旋转

设 L 是 yOz 平面上一条曲线，其方程是 $\begin{cases}f(y,z)=0,\\x=0,\end{cases}$ 则

(1)L 绕 y 轴旋转所得旋转面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

(2)L 绕 z 轴旋转所得旋转面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

柱面:平行于定直线并沿定曲线 Γ 移动的直线 L 形成的轨迹

(1) 准线为 $\Gamma:\begin{cases}f(x,y)=0,\\z=0,\end{cases}$ 母线平行于 z 轴的柱面方程为 $f(x,y)=0$;

(2)准线为 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$ 母线平行于 z 轴的柱面方程为 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$. 联立消去 z 所得的二元方程 $H(x,y)=0$.

二次曲面

(1) 椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$,特别的:圆锥面 $x^2+y^2=z^2$;

(2) 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,特别的:球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$;

(3) 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

(4) 双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

(5) 椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$,特别的:旋转抛物面 $z=x^2+y^2$;

(6) 双曲抛物面(马鞍面) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$.

微信公众号:djky66
(顶尖考研祝您上岸)

空间曲线投影

曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$ 消去 z 得到关于 xOy 面的投影柱面 $H(x,y)=0$.

曲线 Γ 在 xOy 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}H(x,y)=0,\\z=0.\end{cases}$

常考题型与典型例题

常考题型

建立柱面和旋转面方程

【例 1】 求以曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+2z^2=1,\\z=x^2+y^2\end{cases}$ 为准线,母线平行于 z 轴的柱面.

解

将 $z=x^2+y^2$ 代入 $x^2+y^2+2z^2=1$ 得 $x^2+y^2+2(x^2+y^2)^2=1$,即

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}$$

为所要求的柱面.

【例 2】 求下列曲线绕指定的轴旋转产生的旋转面的方程.

(1) $\begin{cases} 2x^2+y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转.

(2) $\begin{cases} z=y^2, \\ x=0 \end{cases}$ 分别绕 y 轴和 z 轴旋转.

解

(1) 绕 x 轴旋转面方程：$2x^2+y^2+z^2=1$；

绕 y 轴旋转面方程：$2(x^2+z^2)+y^2=1$.

(2) 绕 y 轴旋转面方程：$\sqrt{x^2+z^2}=y^2$，即 $x^2+z^2=y^4$；

绕 z 轴旋转面方程：$z=y^2+x^2$.

【例 3】 求曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2=ax, \end{cases}$ $(a>0)$ 在 xOy 面和 xOz 面上的投影曲线方程.

解

在 xOy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2=ax, \\ z=0. \end{cases}$

在 xOz 面上的投影为 $\begin{cases} z^2+ax=a^2, \\ y=0. \end{cases}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$.

第四节　多元微分学在几何上的应用

考试内容概要

1. 曲面的切平面与法线

(1) 曲面 $F(x,y,z)=0$，法向量：$\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)$.

(2) 曲面 $z=f(x,y)$，法向量：$\boldsymbol{n}=(f'_x,f'_y,-1)$.

2. 曲线的切线与法平面

(1) 曲线 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases}$ 切向量：$\boldsymbol{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$.

(2) 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$ 切向量：$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$，其中 $\boldsymbol{n}_1=(F'_x,F'_y,F'_z)$，$\boldsymbol{n}_2=(G'_x,G'_y,G'_z)$.

常考题型与典型例题

常考题型

建立曲面的切平面和法线及曲线的切线和法平面的方程

【例 1】 (2013) 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为

(A) $x-y+z=-2$.　　(B) $x+y+z=0$.

(C) $x-2y+z=-3$.　　(D) $x-y-z=0$.

解

令 $F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$,则

$$F'_x(0,1,-1)=[2x-y\sin(xy)+1]\Big|_{(0,1,-1)}=1,$$

$$F'_y(0,1,-1)=[-x\sin(xy)+z]\Big|_{(0,1,-1)}=-1,$$

$$F'_z(0,1,-1)=(y)\Big|_{(0,1,-1)}=1,$$

则所求切平面法线向量为

$$\boldsymbol{n}=\{1,-1,1\}.$$

切平面方程为

$$(x-0)-(y-1)+(z+1)=0,$$

即 $x-y+z=-2$.

故应选(A).

【例 2】 (1993) 由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为_____.

解

曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转所得旋转面为

$$3x^2+3z^2+2y^2=12.$$

该旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处指向外侧的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{0,2\sqrt{3},3\sqrt{2}\}.$$

$$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{12+18}=\sqrt{30},$$

则 $\boldsymbol{n}^\circ=\left\{0,\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{30}},\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{30}}\right\}=\left\{0,\sqrt{\dfrac{2}{5}},\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right\}$.

【例 3】 (2003) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面的方程是_____.

【$2x + 4y - z = 5$】

【例 4】 求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin \frac{t}{2}$ 在点 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程和法平面方程.

解

切线方程为 $\dfrac{x + 1 - \frac{\pi}{2}}{1} = \dfrac{y - 1}{1} = \dfrac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

法平面方程为 $x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0$.

【例 5】 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线和法平面方程.

解

切线方程为 $\dfrac{x - 1}{-3} = \dfrac{y + 2}{0} = \dfrac{z - 1}{3}$.

法平面方程为 $x - z = 0$.

第十二章　多元积分学及其应用

大纲考试内容	大纲考试要求 数一
三重积分的概念 两类曲线积分的概念	理解
重积分的性质 两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系 两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系 散度与旋度的概念	了解
计算两类曲线积分的方法 格林公式 平面曲线积分与路径无关的条件 计算两类曲面积分的方法 用高斯公式计算曲面积分的方法	掌握
三重积分(直角坐标、柱面坐标、球面坐标) 二元函数全微分的原函数 用斯托克斯公式计算曲线积分 散度与旋度 用重积分、曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量(平面图形的面积、体积、曲面面积、弧长、质量、质心、形心、转动惯量、引力、功及流量等)	会计算

第一节　三重积分

考试内容概要

三重积分

1. 定义

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k.$$

2. 性质

与二重积分类似.

3. 计算

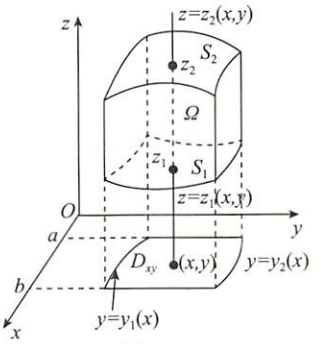


图 1

直角坐标

(1) 先一后二(先单后重)

设平行于 z 且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面 S 最多两个交点. Ω 在 xOy 面

上的投影域为 D_{xy}（如图 1），则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

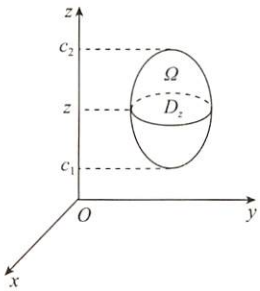


图 2

（2）先二后一（先重后单）

设空间区域 $\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D_z, c_1 \leqslant z \leqslant c_2\}$，其中 D_z 是垂直于 z 轴的平面截闭区域 Ω 所得的平面闭区域（如图 2），则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

柱坐标

柱坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \leqslant r < +\infty, \\ y = r\sin\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

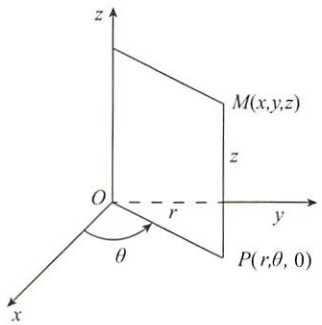


图 3

体积微元

$\mathrm{d}v = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$（如图 3）.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

球坐标

球坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & 0 \leqslant r < +\infty, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ z = r\cos\varphi, & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

体积微元

$\mathrm{d}v = r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$（如图 4）.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

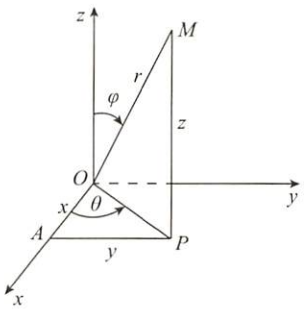


图 4

利用奇偶性

若积分域 Ω 关于 xOy 坐标面对称，$f(x,y,z)$ 关于 z 有奇偶性，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \begin{cases} 2\iiint\limits_{D_{z\geqslant 0}} f(x,y,z)\mathrm{d}v, & f(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 是偶函数}, \\ 0, & f(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 是奇函数}. \end{cases}$$

【注】 若积分域关于 xOz 或 yOz 坐标面对称有相应结论.

利用变量的轮换对称性

常考题型与典型例题

常考题型

三重积分计算

【例 1】 (1988) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$ 及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$，则

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$.　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$.　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v$.

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

【C】

【例 2】 (2009) 设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ _____.

解

【方法 1】 先二后一.

【方法 2】 轮换对称性 + 球坐标.

【$\frac{4}{15}\pi$】

【例 3】 (2015) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ _____.

解

【方法 1】 由变量的对称性知

$$\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \iiint\limits_{\Omega} 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

则 $$\iiint_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=6\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}z\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

【方法 2】 由变量的对称性知

$$\iiint_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\text{先二后一})$$

$$=6\int_0^1z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{4}.$$

【例 4】 (1989) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

解

【方法 1】 由 Ω 关于 yOz 坐标面对称，x 是 x 的奇函数，则 $\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v=0$.

利用球面坐标计算

$$\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8},$$

所以 $\iiint_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v=\frac{\pi}{8}$.

【方法 2】 $\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v=0$,

$$\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}}[(1-x^2-y^2)-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{4}-\iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}.$$

【方法 3】 $\iiint_{\Omega} x\,dv = 0$,

$$\iiint_{\Omega} z\,dv = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dz \iint_{x^2+y^2\leqslant z^2} z\,dx\,dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dz \iint_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2} z\,dx\,dy$$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z^3\,dz + \pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 z(1-z^2)\,dz$$

$$= \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8}.$$

【方法 4】 $\iiint_{\Omega} x\,dv = 0$,

$$\iiint_{\Omega} z\,dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dr \int_r^{\sqrt{1-r^2}} zr\,dz$$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r(1-2r^2)\,dr$$

$$= \frac{\pi}{8}.$$

第二节 曲线积分

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

考试内容概要

一、对弧长的线积分（第一类线积分）

1. 定义

$$\int_L f(x,y)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

2. 性质

$$\int_{\overset{\frown}{L(AB)}} f(x,y)\,ds = \int_{\overset{\frown}{L(BA)}} f(x,y)\,ds \quad \text{（与积分路径方向无关）.}$$

3. 计算方法(平面)

直接法

(1) 若 $L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\alpha\leqslant t\leqslant\beta$,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\ \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

(2) 若 $L:y=y(x),a\leqslant x\leqslant b$,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\ \sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

(3) 若 $L:r=r(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta,r\sin\theta)\ \sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta.$$

利用奇偶性

(1) 若积分曲线 L 关于 y 轴对称,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{L_{x\geqslant 0}} f(x,y)\mathrm{d}s, & \text{当 } f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数},\\ 0, & \text{当 } f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}.\end{cases}$$

(2) 若积分曲线 L 关于 x 轴对称,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{L_{y\geqslant 0}} f(x,y)\mathrm{d}s, & \text{当 } f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数},\\ 0, & \text{当 } f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数}.\end{cases}$$

利用对称性

若积分曲线关于直线 $y=x$ 对称,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_L f(y,x)\mathrm{d}s$.

特别的 $\int_L f(x)\mathrm{d}s=\int_L f(y)\mathrm{d}s$.

对空间线积分 $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$,通常化为定积分计算,即若曲线 L 的方程为:$x=x(t)$,$y=y(t),z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,则

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\ \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

二、对坐标的线积分(第二类线积分)

1. 定义

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

2. 性质

$$\int_{\overset{\frown}{L(AB)}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\int_{\overset{\frown}{L(BA)}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \quad (\text{与积分路径方向有关}).$$

3. 计算方法(平面)

直接法

设有光滑曲线 $L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases} t\in[\alpha,\beta]$,其起点和终点分别对应参数 $t=\alpha$ 和 $t=\beta$,$P(x,y)$,$Q(x,y)$ 在 L 上连续,则

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t.$$

格林公式

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成,函数 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数,则有

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 L 为 D 取正向的边界曲线.

补线用格林公式(利用线积分与路径无关)

(1) 线积分与路径无关的判定

定理 设函数 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 在单连通域 D 上有一阶连续偏导数,则以下四条等价:

① 线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关;

② $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$,其中 L 为 D 中任一分段光滑闭曲线;

③ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,$\forall (x,y)\in D$;

④ $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}F(x,y)$.

(2) 计算

① 改换路径计算

一般是沿平行于坐标轴的直线积分.

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{x_1}^{x_2} P(x,y_1)\mathrm{d}x+\int_{y_1}^{y_2} Q(x_2,y)\mathrm{d}y,$$

或

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{y_1}^{y_2} Q(x_1,y)\mathrm{d}y+\int_{x_1}^{x_2} Q(x,y_2)\mathrm{d}x.$$

② 利用原函数计算

设 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}F(x,y)$,即 $F(x,y)$ 为 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的原函数,则

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1).$$

求原函数方法：偏积分；凑微分.

4. 两类线积分的联系

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s.$$

5. 计算方法(空间)

(1) 直接法

设分段光滑的曲线 L 由参数方程 $x=x(t),y=y(t),z=z(t),t\in[\alpha,\beta]$ 给出，其起点和终点分别对应参数 $t=\alpha$ 和 $t=\beta$，P,Q,R 在 L 上连续，则

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(2) 斯托克斯公式

设 L 为空间分段光滑的有向闭曲线，Σ 是以 L 为边界的分片光滑曲面，L 的方向与 Σ 的法方向符合右手法则，函数 P,Q,R 在 Σ 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\begin{aligned}&\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S\\&=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

常考题型与典型例题

常考题型

曲线积分计算

一、第一类线积分的计算

【例 1】 (1989) 设平面曲线 L 为下半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分

$\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ _____.

$\int_L x\mathrm{d}s=$ _____.

$\int_L y\mathrm{d}s=$ _____.

解

$$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s = \int_L 1\mathrm{d}s = \pi.$$

$$\int_L x\mathrm{d}s = \int_{\pi}^{2\pi} \cos t \sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{2\pi} \cos t\mathrm{d}t = 0.$$

$$\int_L y\mathrm{d}s = \int_{\pi}^{2\pi} \sin t \sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{2\pi} \sin t\mathrm{d}t = -2.$$

【例 2】 (1998) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s =$ _____.

解

由奇偶性知

$$\oint_L 2xy\mathrm{d}s = 0,$$

则

$$\text{原式} = \oint_L (3x^2+4y^2)\mathrm{d}s = 12\oint_L \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}s$$

$$= 12\oint_L 1\mathrm{d}s = 12a.$$

【例 3】 (2009) 已知曲线 $L: y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$，则 $\int_L x\mathrm{d}s =$ _____.

解

$$\int_L x\mathrm{d}s = \int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+(2x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}(1+4x^2)$$

$$= \frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{13}{6}.$$

微信公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

二、第二类线积分的计算

【例 4】 (2004) 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ 的值为 _____.

解

【方法 1】 直接法.

【方法 2】 补线用格林公式. 【$\frac{3}{2}\pi$】

【例 5】 (2010) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|(x\in[-1,1])$,起点是$(-1,0)$,终点为$(1,0)$,则曲线积分$\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=$ _____.

解

【方法 1】 $L=L_1+L_2$,其中 $L_1:y=1+x(-1\leqslant x\leqslant 0)$,$L_2:y=1-x(0\leqslant x\leqslant 1)$.

$$\int_{L_1} xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}[x(1+x)+x^2]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(2x^2+x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6},$$

$$\int_{L_2} xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}[x(1-x)-x^2]\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}(x-2x^2)\mathrm{d}x=-\frac{1}{6},$$

故$\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$.

【方法 2】 补线用格林公式.

【例 6】 (1999) 求 $I=\int_L[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$,其中 a,b 为正的常数,L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

解

添加从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A(2a,0)$ 的有向直线段 L_1,

$$I=\int_{L\cup L_1}[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$$

$$-\int_{L_1}[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y.$$

由格林公式,前一积分

$I_1=\iint_D(b-a)\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)$,其中 D 为 $L\cup L_1$ 所围成的半圆域.

直接计算后一积分可得

$$I_2=\int_0^{2a}(-bx)\mathrm{d}x=-2a^2b.$$

从而 $I=I_1-I_2=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)+2a^2b=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$.

【例 7】 (2008) 计算曲线积分$\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$,其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点$(0,0)$ 到点$(\pi,0)$ 的一段.

解

【方法 1】 直接法.

$$\begin{aligned}\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi}[\sin 2x+2(x^2-1)\sin x\cdot\cos x]\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\pi}x^2\,\mathrm{d}\sin^2 x = x^2\sin x\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}x\sin^2 x\mathrm{d}x\\ &= (-2)\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x = -2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x\\ &= (-2\pi)\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

【方法 2】 补线用格林公式.

【例 8】 (2014,数一) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$ _____.

解

【方法 1】 柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)\\ z=-\sin t,\end{cases}$$

微信公众号: djky66
(顶尖考研祝您上岸)

则
$$\begin{aligned}\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}(\sin^2 t-\sin t\cos t)\mathrm{d}t\\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

【方法 2】 由斯托克斯公式得

$$\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma}(1-0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(1-0)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(0-0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为平面 $y+z=0$ 包含在柱面 $x^2+y^2=1$ 之内部分的上侧,

$$\begin{aligned}\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z &= \iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\ &= \iint_{D_{zx}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pi\ (\text{其中 } D_{zx}=\{(x,z)\,|\,x^2+z^2\leqslant 1\}).\end{aligned}$$

【方法 3】 将空间线积分化为平面线积分用格林公式,

由 $y+z=0$ 得 $z=-y$,代入积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z$ 得

$$\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=\oint_C(-y\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y) \qquad \text{（其中 } C \text{ 为单位圆 } x^2+y^2=1 \text{ 沿逆时针方向）}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi. \qquad \text{（格林公式）}$$

第三节　曲面积分

考试内容概要

一、对面积的面积分（第一类面积分）

1. 定义

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

2. 性质

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{-\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

（与积分曲面的方向无关）.

3. 计算

（1）直接法

设曲面 $\Sigma:z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$，

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若曲面由方程 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(z,x)$ 给出，也可类似地把对面积的面积分化为相应的二重积分.

（2）利用奇偶性

若曲面 Σ 关于 xOy 面对称，则

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}2\iint\limits_{\Sigma_{z\geqslant 0}}f(x,y,z)\mathrm{d}S, & \text{当 } f(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数,}\\ 0, & \text{当 } f(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数.}\end{cases}$$

若曲面 Σ 关于 yOz 面或 zOx 面对称，也有类似的结论.

(3) 利用对称性

二、对坐标的面积分(第二类面积分)

1. 定义

$$I=\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz},$$

$$\iint_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx},$$

$$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}.$$

2. 性质

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{-\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(与积分曲面的方向有关).

3. 计算

(1) 直接法

设有向曲面 $\Sigma:z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$,则

$$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若有向曲面 Σ 的法线向量与 z 轴正向夹角为锐角,即曲面的上侧,上式中取正号,否则取负号.

设有向曲面 $\Sigma:x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$,则

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint_{D_{yz}}P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

若有向曲面 Σ 的法线向量与 x 轴正向夹角为锐角,即曲面的前侧,上式中取正号,否则取负号.

设有向曲面 $\Sigma:y=y(z,x),(z,x)\in D_{zx}$,则

$$\iint_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint_{D_{zx}}Q[x,y(z,x),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

若有向曲面 Σ 的法线向量与 y 轴正向夹角为锐角,即曲面的右侧,上式中取正号,否则取负号.

(2) 高斯公式

设空间闭区域 Ω 由分片光滑闭曲面 Σ 所围成,函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在

Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_{\Sigma_{外}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v.$$

(3) 补面用高斯公式

4. 两类面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} (P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y).$$

常考题型与典型例题

常考题型

曲面积分计算

一、第一类曲面积分的计算

【例 1】 (2000) 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geqslant 0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有

(A) $\iint_S x\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}S$.　　(B) $\iint_S y\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}S$.

(C) $\iint_S z\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}S$.　　(D) $\iint_S xyz\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} xyz\mathrm{d}S$.

【答案】 C.

解

对于(A)，$\iint_S x\mathrm{d}S = 0$，$\iint_{S_1} x\mathrm{d}S > 0$，故(A) 错.

对于(B)，$\iint_S y\mathrm{d}S = 0$，$\iint_{S_1} x\mathrm{d}S > 0$，故(B) 错.

对于(C)，$\iint_S z\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} z\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}S$，正确.

对于(D)，$\iint_S xyz\mathrm{d}S = 0$，$\iint_{S_1} xyz\mathrm{d}S > 0$，故(D) 错.

【例 2】 (2012) 设 $\Sigma = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$，则 $\iint_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S =$ _____.

解

$$\iint_{\Sigma} y^2 \mathrm{d}S = \sqrt{3}\iint_{D} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} y^2 \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

【例 3】 (1995) 计算曲面积分$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S$,其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2 \leqslant 2x$ 内的部分.

解

Σ 在 xOy 平面上的投影区域 $D: x^2+y^2 \leqslant 2x$.

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\mathrm{d}\sigma,$$

于是

$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = \iint_{D} \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \mathrm{d}\theta = \frac{32}{9}\sqrt{2}.$$

二、第二类曲面积分的计算

【例 4】 (1988) 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧,计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解

由高斯公式,并利用球面坐标计算三重积分,得

$$I = 3\iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v \quad (\Omega \text{ 是由 } \Sigma \text{ 所围成的区域})$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \mathrm{d}r = \frac{12}{5}\pi.$$

【例 5】 (2005) 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域,Σ 是 Ω 的整个边界的外侧,则$\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ _____.

【$(2-\sqrt{2})\pi R^3$】

【例 6】 (2008) 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ _____.

解

设 Σ_1 是曲面 $z=0(x^2+y^2\leqslant 4)$ 取下侧，由 Σ 与 Σ_1 所围的立体(上半球体) 为 Ω，则由高斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\Sigma_1}.$$

由对称性知 $\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，故

$$\iint\limits_{\Sigma}=-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi.$$

【例 7】 (2014) 设 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解

设 S 为平面 $z=1$ 包含在曲面 $z=x^2+y^2$ 之内部分的下侧，则

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+S}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$

$$\iint\limits_{S}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]\mathrm{d}v-0 \quad (\Omega\text{为}z=1\text{和}z=x^2+y^2\text{所围空间体})$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)\mathrm{d}v+6\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v+6\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v,$$

注意到 Ω 关于 yOz 面和 zOx 面都对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v=0.$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^1(3r^2+7)r\mathrm{d}z \qquad \text{(柱坐标)}$$

$$=2\pi\int_0^1 r(3r^2+7)(1-r^2)\mathrm{d}r$$

$$=4\pi,$$

则 $I=-4\pi$.

第四节 多元积分应用

考试内容概要

多元积分应用一览表

所求量 \ 几何形体	平面板	空间体	曲线	曲面
几何度量	面积 $S=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$	体积 $V=\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v$	弧长 $L=\int_C \mathrm{d}s$	面积 $S=\iint\limits_\Sigma \mathrm{d}S$
质　量	$m=\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$	$m=\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}v$	$m=\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s$	$m=\iint\limits_\Sigma \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$
质　心	$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}$	$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}v}$	$\bar{x}=\dfrac{\int_C x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_C \rho(x,y,z)\mathrm{d}s}$	$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_\Sigma x\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_\Sigma \rho(x,y,z)\mathrm{d}S}$
转动惯量	$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$	$I_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$	$I_x=\int_C (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s$	$I_x=\iint\limits_\Sigma (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$

1. 变力做功

$$\text{力 } \boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k},$$

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

2. 通量

$$\text{向量场:}\boldsymbol{U}(x,y,z)=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}.$$

$$\text{通量:}\Phi=\iint\limits_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

常考题型与典型例题

常考题型

形心和变力做功的计算

【例 1】 (2010) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$ _____.

解

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v},\text{而}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^1\Big(\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z=\int_0^1\pi z\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2},$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v=\int_0^1\Big(\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)z\,\mathrm{d}z=\int_0^1\pi z^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},$$

故 $\bar{z}=\dfrac{2}{3}$.

【例 2】 (2000) 设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例常数 $k>0$)，求球体的重心位置.

解

设所考虑的球体为 Ω、球心为 O，以定点 P_0 为原点，射线 P_0O 为正 z 轴建立直角坐标系，则球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=2Rz.$$

设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，得

$$\bar{x}=0,\bar{y}=0,\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} kz(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} k(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}.$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^5\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{64}{3}\pi R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{8}{3}\pi R^5,$$

故 $\bar{z}=\dfrac{5}{4}R$. 因此，球体 Ω 的重心位置为 $\left(0,0,\dfrac{5}{4}R\right)$.

【例 3】 (1990) 质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受到变力 $\boldsymbol{F}$ 作用(见图 5)，$\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于直线段 OP，且与 y 轴正向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$. 求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所做的功.

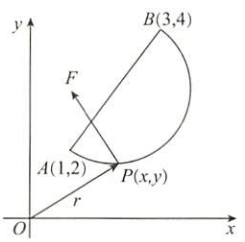


图 5

解

【方法 1】 按题意，变力 $\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$. 变力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y.$$

圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程是

$$\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\cos\theta,\\ y=3+\sqrt{2}\sin\theta,\end{cases}-\frac{3}{4}\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned}W&=\int_{\overset{\frown}{AB}}(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin\theta)\sin\theta+\sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos\theta)\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta\\&=2(\pi-1).\end{aligned}$$

【方法 2】 按题意，变力 $\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$. 变力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功

$$\begin{aligned}W&=\int_{\overset{\frown}{AB}}(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\\&=\oint_{\overset{\frown}{AB}+\overline{BA}}(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{3}^{1}-(1+x)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x\\&=2\pi-2.\end{aligned}$$

第五节 场论初步

考试内容概要

1. 方向导数

(1) 定义

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t},$$

其中 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$.

(2) 定理 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则函数在该点沿任一方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

2. 梯度

定义 设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处具有一阶连续偏导数，

$$\mathbf{grad} f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i} + f'_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}.$$

【注】 梯度 $\mathbf{grad} f(x_0,y_0)$ 是一个向量，它的方向是函数在这点方向导数最大的方向，它的模等于方向导数的最大值.

3. 散度

设有向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \{P,Q,R\}$，其中 P,Q,R 均具有一阶连续偏导数，则

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

4. 旋度

设有向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \{P,Q,R\}$，其中 P,Q,R 均具有一阶连续偏导数，则

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

常考题型与典型例题

常考题型

梯度、散度、旋度的计算

【例 1】 (1996) 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为_____.

解

由于 $u(x,0,1) = \ln(x+1)$，则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,0,1)} = \left.\frac{1}{x+1}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

由于 $u(1,y,1) = \ln(1+\sqrt{y^2+1})$ 为 y 的偶函数，则其导函数为奇函数，因此

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,0,1)} = 0.$$

由于 $u(1,0,z) = \ln(1+z)$，则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,0,1)} = \left.\frac{1}{1+z}\right|_{z=1} = \frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{AB} = \{2,-2,1\},$$

其方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \cos\beta = -\frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

则所求方向导数为

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+0\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

【例 2】 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿 $\boldsymbol{l}=(1,-1,0)$ 方向的方向导数最大.

解

$\boldsymbol{l}=(1,-1,0)$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{2}},\cos\gamma=0$，函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面上点 (x,y,z) 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}=2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2y\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}(x-y).$$

令 $F(x,y,z,\lambda)=x-y+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$，

$$\begin{cases}F'_x=1+2\lambda x=0,\\ F'_y=-1+2\lambda y=0,\\ F'_z=2\lambda z=0,\\ F'_\lambda=2x^2+2y^2+z^2=0.\end{cases}$$

由上式解得可能的极值点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)}=\sqrt{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}=-\sqrt{2},$$

则所求点为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$.

【例 3】 (2012)$\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$ _____.

【(1,1,1)】

【例 4】 (1989) 向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=$ _____.

【2】

【例 5】 (2018) 设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$,则 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{F}(1,1,0)=$ _____.

解

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\ \boldsymbol{F}(1,1,0)&=\left.\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy&-yz&zx\end{vmatrix}\right|_{(1,1,0)}\\&=\left.[(0+y)\boldsymbol{i}-(z-0)\boldsymbol{j}+(0-x)\boldsymbol{k}]\right|_{(1,1,0)}\\&=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

公众号：djky66
(顶尖考研祝您上岸)

同学们，欢呼吧！
这是最后一页了！！！

金榜時代 武忠祥考研数学系列

书名	适用阶段
数学公式的奥秘	全程复习
高等数学·基础篇	提前复习
数学基础过关660题	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	夯实基础
数学复习全书·提高篇	全程复习
数学历年真题全精解析·提高篇	全程复习
高等数学辅导讲义	强化提高
数学强化通关330题	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	冲刺预测
高等数学考研高分领跑计划·十七堂课	专题强化

G20220098

有道考神，更懂考试

欢迎关注公众号
“武忠祥老师”

中国大学MOOC | 有道考神

WP-7-27316

69.8