中国科学技术大学

一九九六年招收硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：信号与系统

一．某连续时间因果LTI系统对输入 $x(t)=e^{-2t}u(t)$ 的响应 $y(t)$ 为

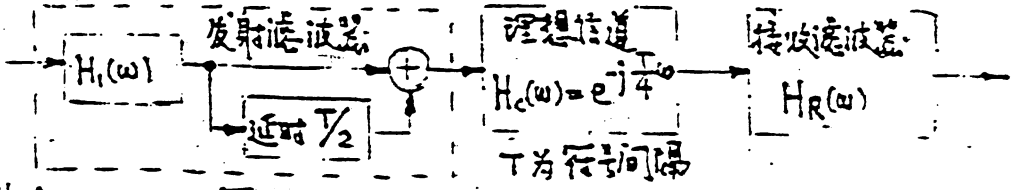
$$y(t)=(5e^{-2t}-4e^{-t}+2te^{-t})u(t)$$；

另一离散时间因果LTI系统对输入 $x[n]=(\frac{1}{2})^{n-2}u[n]$ 的响应 $y[n]$ 为：

$$y[n]=[5(-\frac{1}{2})^n-(\frac{1}{2})^n+10n(\frac{1}{2})^n]u[n]$$，试分别求两个系统的：

1. 系统函数 $H(s)$ 或 $H(z)$，并画出各自的极点零点及收敛域分布图（3分）；
2. 是否稳定？若稳定，则说明各自的幅频特性和相频特性（6分）；
3. 单位冲激响应 $h(t)$ 或 $h[n]$（4分）；
4. 微分方程或差分方程表示（2分）
5. 画出并联实现结构（或信号流图），并给出状态空间描述（或A、B、C和D矩阵）（8分）。

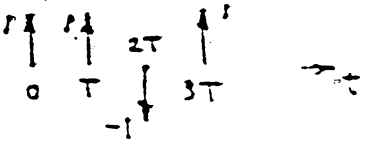
二．某基带传输系统的模型框图如下：



其中：$H_1(\omega)=\begin{cases}\sqrt{\frac{T}{2}} & |\omega|<\frac{2\pi}{T}\\ 0 & |\omega|>\frac{2\pi}{T}\end{cases}$　$H_R(\omega)=\begin{cases}\sqrt{T}\cos(\frac{T}{4}\omega) & |\omega|<\frac{2\pi}{T}\\ 0 & |\omega|>\frac{2\pi}{T}\end{cases}$

试求：

1. 发射滤波器（虚线框内）的频率响应 $H_T(\omega)$，并概画出幅频和相频特性（5分）
2. 接收滤波器的单位冲激响应 $h_R(t)$，并概画出其波形（6分）
3. 整个基带传输系统的单位冲激响应 $h(t)$，系统 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n\delta(t-nT)$ 时的输出 $y(t)$，其中 $\{d_n\}$ 为数据序列。（6分）
4. 当 $x(t)$ 如右图所示时，概画出 $y(t)$ 波形（3分）



三．试列出下差分方程和附加条件描述的离散时间因果系统。

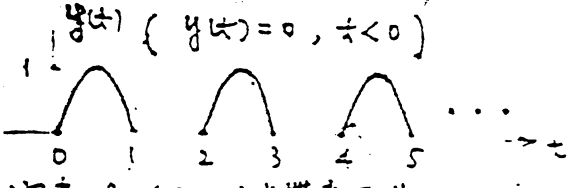
试题名称：信号与系统

$$\begin{cases} y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]-\frac{1}{2}y[n-2]=x[n]+\frac{4}{3}x[n-1]+\sum_{k=2}^{\infty}3^{-k}x[n-k] \\ y[-1]=1\ ,\ y[-2]=7 \end{cases}$$

1. 试求当 $x[n]=3u[n]-4u[n-1]+u[n-2]$ 时的输出 $y[n]$，并分别指出其零输入响应、零状态响应、暂态响应和稳态响应各分量（12分）；

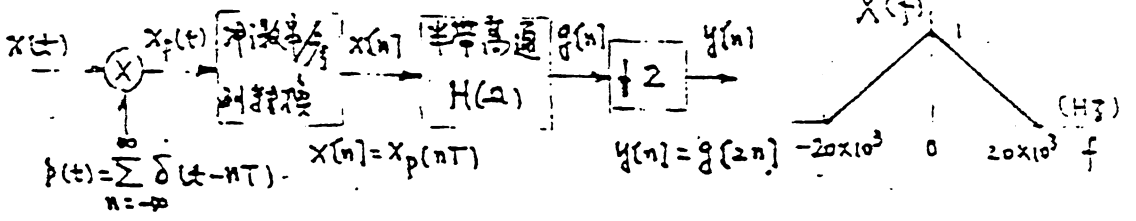
2. 用相加器、数乘器和单位延时实现该因果线性时不变系统的级联实现结构框图（4分）

四. 某连续时间 LTI 系统的 $h(t)=\pi\cos\pi t\,u(t)$，并已知它对某输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 波形如右图。该系统的因果性是否可以确定？试求该输入信号 $x(t)$，并绘出其波形（10分）



$y(t)=0,\ t<0$

五. 对连续时间信号 $x(t)$ 采样后由离散时间数据 $x[n]$ 进行半带高通滤波和 2:1 抽取处理的系统框图如下图所示。设 $x(t)$ 其傅立叶变换的三角形频谱 $X(f)$ 为



半带高通 $H(\Omega)$ 为截止频率是 $\pi/2$ 的离散时间理想高通滤波器。

1. 试求最大采样间隔 T_{max}（2分）

2. 试求半带高通滤波器的单位冲激响应 $h[n]$，并绘出其序列图形（4分）

3. 在 $T=T_{max}$ 时，分别绘出 $x[n]$、$g[n]$ 和 $y[n]$ 的频谱图形（5分）

六. 试用双线性变换法设计一数字高通滤波器，其要求为：

1. 幅频响应在通带频率区间上升（$0\le\Omega\le\pi$）；

2. 3 dB 截止频率为 $\Omega_c=0.5\pi$ 弧度

3. 阻带内（$0\le\Omega\le0.2\pi$）衰减大于 25 dB

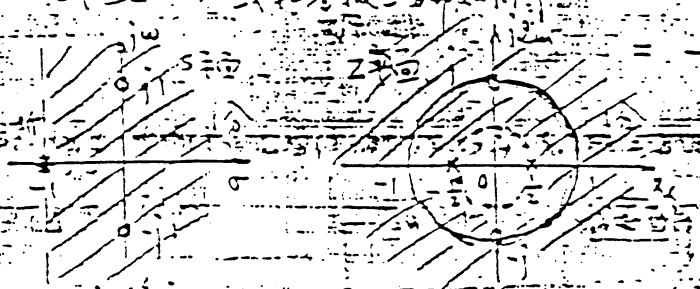
4. 当 $0.8\pi\le\Omega\le\pi$ 时，通带衰减小于 0.1 dB　　（15分）

中国科技大学九六年研究生入学考试《信号与系统》试题解答

一、1. $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{\frac{5}{s+2}-\frac{4}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}}{1/(s+2)}$ $H(j)=\dfrac{Y(j)}{X(j)}$

$=\dfrac{s^2+1}{s^2+2s+1}$ 3分 $=\dfrac{\frac{5}{1+\frac{1}{2}j^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}j^{-1}}+10\frac{\frac{1}{2}j^{-1}}{(1-\frac{1}{2}j^{-1})^2}}{4/(1-\frac{1}{2}j^{-1})}$

S平面上收敛域和零极点分布如下：



$=\dfrac{1+3^{-2}}{1-\frac{1}{4}3^{-2}}$ 3分

Z平面上收敛域和零极点分布

2. 幅频特性 $H(\omega)=\dfrac{1-\omega}{1+\omega}$ 1分 $\tilde{H}(\Omega)=\dfrac{1-e^{-j\Omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$ 1分



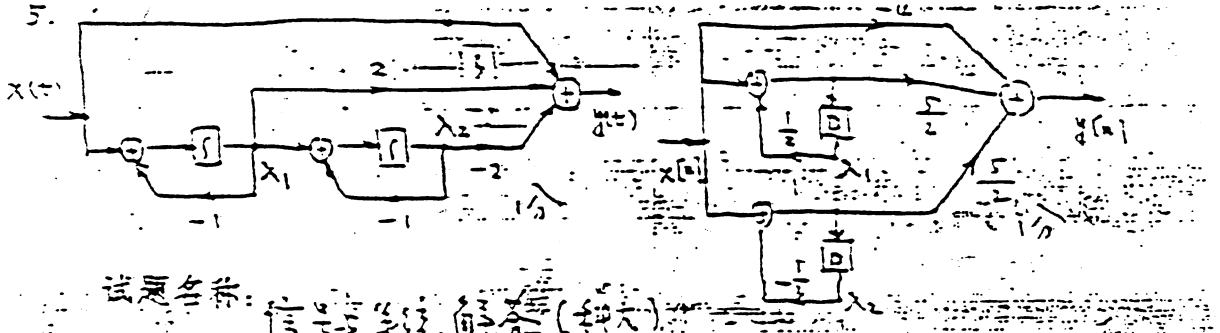
1分

3. $H(s)=1+\dfrac{2}{s+1}=\dfrac{2}{(s+1)^2}$ 1分 $H(j)=-4+\dfrac{5/2}{1-\frac{1}{2}j^{-1}}+\dfrac{5/2}{1+\frac{1}{2}j^{-1}}$ 1分

$h(t)=\delta(t)+2e^{-t}u(t)-2te^{-t}u(t)$ 2分 $h[n]=-4\delta[n]+\frac{5}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$ 2分

4. $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x''(t)+x(t)$ 1分 $y[n]-\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]-x[n-2]$ 1分

5.



1分 1分

试题答案：信号与系统（第六章）

另一种解法：直接求 $H_2(\omega)$ 的反傅立叶变换

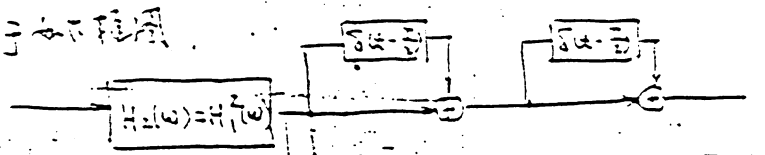
$$h_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_2(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}\omega\right)\left[u\left(\omega+\frac{2\pi}{\pi}\right)-u\left(\omega-\frac{2\pi}{\pi}\right)\right]\right\}$$

利用对称性质可直接得出结果，或通过积分计算得出

$$h_2(t) = \frac{4}{\pi}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{1-\left(\frac{4}{\pi}t\right)^2} \qquad 4\text{分}$$

正确的理想低通滤波器 2分

3. 由于理想低通滤波器的冲激响应 $h_c(t) = \delta\left(t-\frac{1}{2}\right)$，其频率特性为



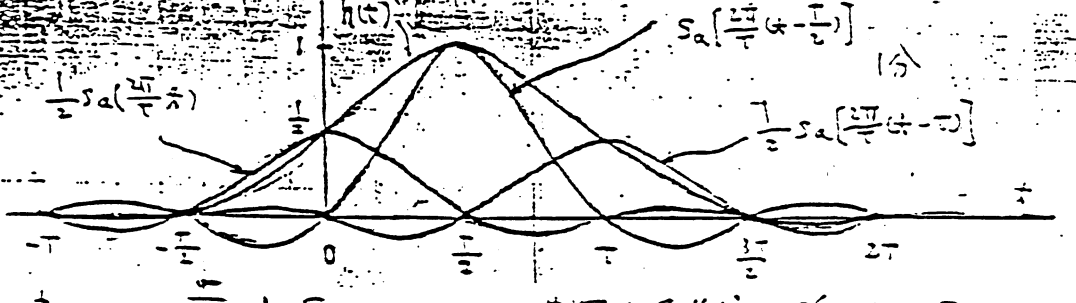
$$h(t) = h_2(t) * \left[\delta(t)+\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] * \left[\delta(t)+\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= h_2(t) + 2h_2\left(t-\frac{1}{2}\right) + h_2(t-1)$$

$$h_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_2(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\left[u\left(\omega+\frac{2\pi}{\pi}\right)-u\left(\omega-\frac{2\pi}{\pi}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{2\pi/\pi}{\pi}\,Sa\left(\frac{2\pi}{\pi}t\right) = \frac{1}{2}Sa\left(\frac{2\pi}{\pi}t\right) \qquad 1\text{分}$$

$$h(t) = \frac{1}{2}Sa\left[\frac{2\pi}{\pi}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right] + Sa\left[\frac{2\pi}{\pi}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}Sa\left[\frac{2\pi}{\pi}(t-1)\right] \qquad 2\text{分}$$



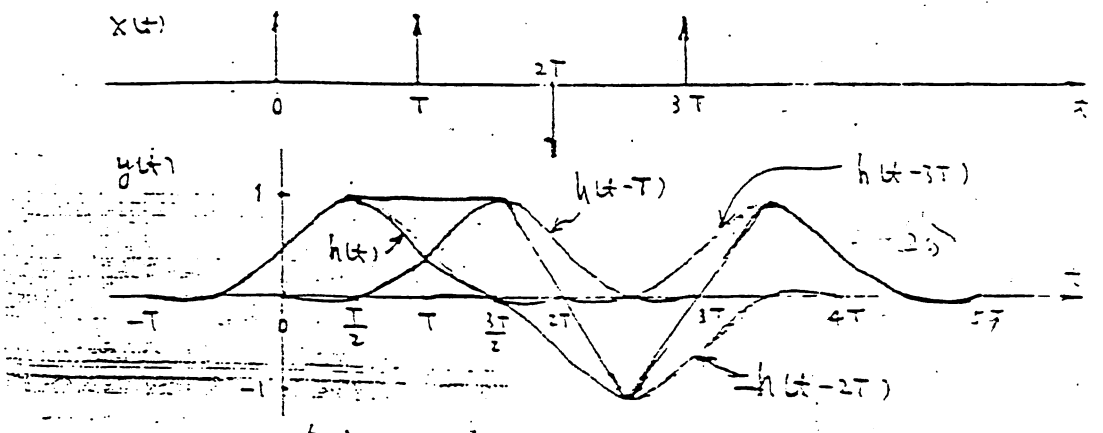
4. 设 $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n\,\delta(t-nT)$，其中 d_n 为输入序列，$h(t)$ 为系统的冲激响应

$$y(t) = x(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n\,h(t-nT) \qquad 2\text{分}$$

5. 设 $x(t) = p(t) - p(t-T) + p(t-2T) - p(t-3T)$，则输出为

$$y(t) = h(t) - h(t-T) + h(t-2T) - h(t-3T)$$

（大概画出）输出波形 1分



三、

$$\begin{cases} y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] = x[n] * (\frac{1}{3})^n u[n] + x[n-1] \quad \text{---(1)} \\ y[-1] = 1, \quad y[-2] = 1 \end{cases}$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right) - \left(4 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) = \left[\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + z^{-1}\right]X(z)$$

$$Y(z) = \frac{\left(1 + z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}\right)R}{(1-z^{-1})\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}X(z) + \frac{4 + \frac{1}{2}z^{-1}}{(1-z^{-1})\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \quad 2\text{分}$$

零狀態響應 $Y_{zs}(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{(1-z^{-1})\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{3}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$

$$y_{zs}[n] = 3u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad 1\text{分}$$

零輸入響應 $Y_{zi}(z) = \frac{1 + z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}}{(1-z^{-1})\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}X(z) \quad \text{---(2)}$

其中 $X(z) = \frac{3}{1-z^{-1}} - \frac{4z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} = 3\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right) \quad 1\text{分}$

代入(2)式得

$$Y_{zi}(z) = \frac{3 + 3z^{-1} - z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}} = 2 + \frac{1 + 4z^{-1}}{(1-z^{-1})\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$= 2 + \frac{10/3}{1-z^{-1}} - \frac{7/3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$y_{zi}[n] = 2\delta[n] + \frac{10}{3}u[n] - \frac{7}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad 2\text{分}$$

全响应 $y[n] = y_{zs}[n] + y_{zi}[n] = 2\delta[n] + \frac{19}{3}u[n] - \frac{11}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad 1\text{分}$

$$\text{영입력 응답} = 2\delta[n] - \frac{5}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (1\text{점})$$

$$\text{영상태 응답} = \frac{1}{3}u[n] \quad (1\text{점})$$

[참고 II] : (1)번과 같은 방법으로 (2)번의 식을 구하면 다음과 같다.

$$v[n] = x[n] * \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + x[n-1] \quad (1\text{점})$$

$$x[n] = 3u[n] - 4u[n-1] + u[n-2] = 3\delta[n] - \delta[n-1] \quad (1\text{점})$$

$$v[n] = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1] + 3\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

$$= 3\delta[n] + 3\delta[n-1] - \delta[n-2] \quad (2\text{점})$$

$$\begin{cases} y_{zs}[n] - \frac{1}{2}y_{zs}[n-1] - \frac{1}{2}y_{zs}[n-2] = 0 \\ y_{zs}[-1] = 1 \ , \ y_{zs}[-2] = 7 \end{cases}$$

$$y_{zs}[n] = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad n \geq 0 \quad (1\text{점})$$

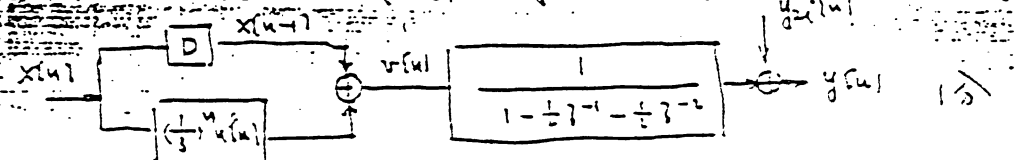
$$y_{zs}[n] - \frac{1}{2}y_{zs}[n-1] - \frac{1}{2}y_{zs}[n-2] = 3\delta[n] + 3\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

$$Y_{zs}(z) = \frac{3 + 3z^{-1} - z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}} = 2 + \frac{10/3}{1-z^{-1}} - \frac{7/3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

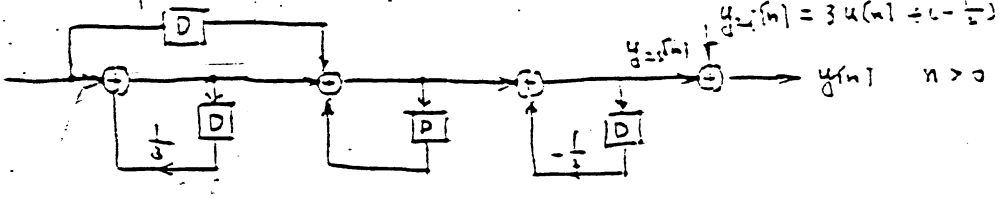
$$y_{zs}[n] = 2\delta[n] + \frac{10}{3}u[n] - \frac{7}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (2\text{점})$$

[참고 I 풀이]

(2)번 역시 (1)번과 같은 방법으로 풀 수 있다.



또는 다음과 같은 direct form II 구조로 풀 수도 있다.



3점 (부분 $y_{zs}[n]$ 은 0.5점)

[참고 III] : 다음과 같은 방법으로 풀 수도 있다.

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} f[m]\, h[n-m] \quad (n \geq 0) \quad (1\text{점})$$

참고 : 위와 같은 방법으로 풀 수 있다. (부분점수 없음)

$f(t) = \sin \pi t\, u(t) + \sin \pi (t-1)\, u(t-1)$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\pi}{s^2+\pi^2}(1+e^{-s}) \quad 1\text{점}$$

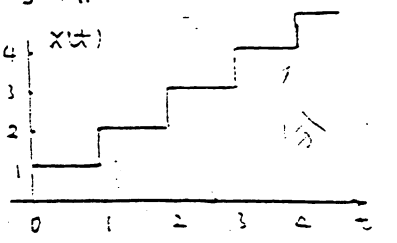
$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} f(t-2n)\right\} = \frac{F(s)}{1-e^{-2s}} = \frac{\pi}{(s^2+\pi^2)(1-e^{-s})}, \quad R_x\{s\} > 0 \quad 2\text{점}$$

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{\pi \cos \pi t\, u(t)\} = \frac{\pi s}{s^2+\pi^2}, \quad R_x\{s\} > 0 \quad 1\text{점}$$

따라서

$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1-e^{-s}} \quad R_x\{s\} > 0 \quad 2\text{점}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s}}{1-e^{-s}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} u(t-n) \quad 2\text{점}$$



1점

[별해] 입력과 출력의 관계식을 이용하여 구하는 경우

풀이과정 II : 입력과 출력의 관계식 : $y(t)$ 구하는 과정 :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t-2n) \quad 1\text{점}$$

$$f(t) = \sin \pi t\, u(t) + \sin \pi (t-1)\, u(t-1)$$

$$= \pi \cos \pi t\, u(t) * \left[u(t) + u(t-1)\right] \quad 2\text{점}$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[f(t) * \delta(t-2n)\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \pi \cos \pi t\, u(t) * \left[u(t) + u(t-1)\right] * \delta(t-2n)$$

$$= \pi \cos \pi t\, u(t) * \sum_{n=0}^{\infty}\left[u(t-2n) + u(t-(2n+1))\right]$$

$$= \pi \cos \pi t\, u(t) * \sum_{n=0}^{\infty} u(t-n)$$

$$= h(t) * x(t) \quad 5\text{점}$$

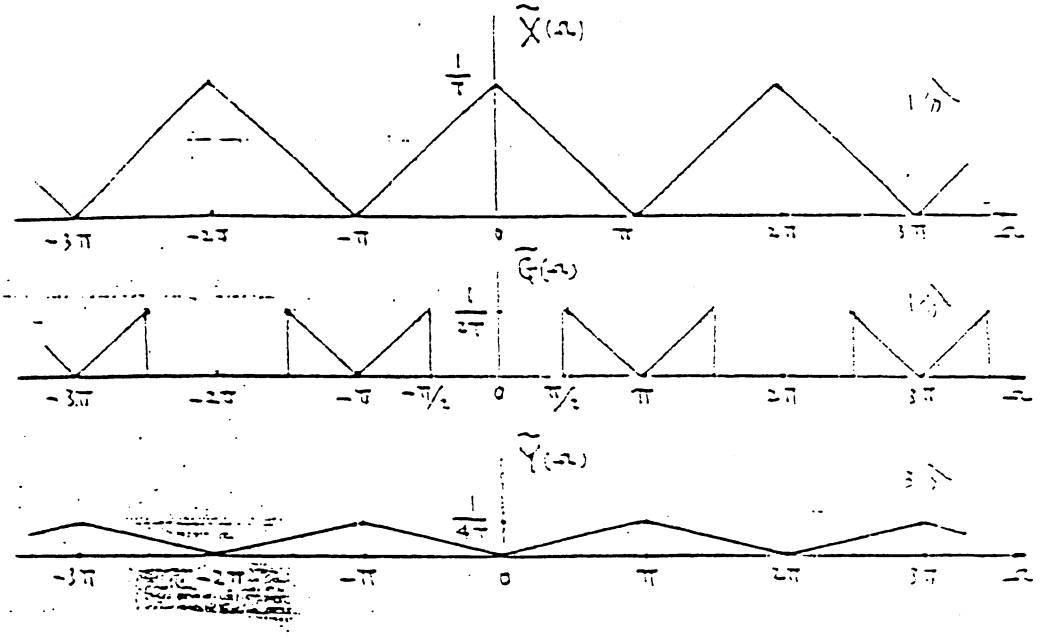
$$\therefore x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t-n) \quad 1\text{점} \quad \text{[별해] 입력과 출력의 관계식을 이용하여 구하는 경우}$$

문 1. $T_{max} = \frac{1}{2f_m} = \frac{1}{2 \times 20 \times 10^3} = 25\ \mu s$

2. $\widetilde{H}_h(\Omega) = \begin{cases} 0 & |\Omega| < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < |\Omega| < \pi \end{cases}$ 주기함수 $(-\pi, \pi)$ 구간

풀이과정 I : 주기함수의 정의에 따라 $\widetilde{H}_L(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |\Omega| < \pi \end{cases}$

3. x[n], g[n] 和 y[n] 之間的 $\tilde{X}(\omega)$、$\tilde{G}(\omega)$ 和 $\tilde{Y}(\omega)$ 如下圖



第 4 版共 6 版

方法一（模拟低通→模拟高通→数字高通）

① 用双线性变换，对应的模拟高通波纹的各频率为：

$\bar{\omega}_c = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_c}{2} = \frac{2}{T}\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2}{T}$ （3dB频率）

$\bar{\omega}_1 = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_1}{2} \approx 0.325\cdot\frac{2}{T}$ （阻带边频）

$\bar{\omega}_2 = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_2}{2} \approx 3.078\frac{2}{T}$ （通带边频）

（2分）

② 模拟低通→模拟高通变换为：

$s = \omega_c\bar{\omega}_c/\bar{s}$，$s$、$\bar{s}$分别为低通和高通的复变量

设模拟低通的3dB截止频率为1（归到频率）

则：$\omega_c = 1$ （弧度/秒）

$\omega_1 = -\bar{\omega}_c/\bar{\omega}_1 = -\frac{2}{T}/(0.325\cdot\frac{2}{T}) = -3.078$

$\omega_2 = -\bar{\omega}_c/\bar{\omega}_2 = -0.325$ （3分）

③ 由题中②、③两要求（由②选用巴特沃斯滤波器）

$$\begin{cases} 10\lg\dfrac{1}{1+\left(\frac{j\omega_1}{j\omega_c}\right)^{2N}} \le -25 \\ 10\lg\dfrac{1}{1+\left(\frac{j\omega_2}{j\omega_c}\right)^{2N}} \ge -0.1 \end{cases}$$ 2分

$$\begin{cases} 1+3.078^{2N} \ge 10^{2.5} \approx 316.2 \\ 1+0.325^{2N} \le 10^{0.01} \approx 1.023 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N \ge 2.56 \\ N \ge 1.68 \end{cases}$$

注意各位：信号与系统试卷解答（中国铁大）

取N为大于N_1, N_2而最小整数3. 模拟低通滤波器为

$$H_L(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1} \qquad (2分)$$

② 模拟高通滤波器的系统函数为.

$$H_h(\bar{s})=H_L(s)\Big|_{s=\bar{\omega}_c/\bar{s}=\frac{2}{\bar{s}}}$$

$$=\frac{(\bar{s})^3}{\bar{s}^3+4\bar{s}^2+8\bar{s}+8} \qquad (2分)$$

③ 数字高通滤波器的系统函数为:

$$H(z)=H_h(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \qquad (1分)$$

$$=\frac{\left(2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3}{8\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3+16\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+16\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+8}$$

$$=\frac{(1-z^{-1})^3}{6+2z^{-2}} \qquad (3分)$$

(注: 若计算过中将变换中的T不舍去, 且结果正确, 不扣分.)

方法二：（模拟低通 → 数字低通 → 数字高通）

① 数字低通 → 数字高通的变换为：

$$H_h(z)=H_L(z)\Big|_{z^{-1}=-\frac{z^{-1}+a}{1+az^{-1}}} \quad 其中 a=-\frac{\cos\left(\frac{\Omega_c+\Omega_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega_c-\Omega_c}{2}\right)}$$

其中 Ω_c 为低通滤波器的主要参量，Ω_c 为高通滤波器的主要参量，

Ω_c 为高通截止频率，Ω_c 为低通截止频率

- 方便起见，可设 $\Omega_c=\Omega_c$，则

$$a=-\frac{\cos\frac{\Omega_c+\Omega_c}{2}}{\cos\frac{\Omega_c-\Omega_c}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}=0$$

{将 Ω_c 设为其他值也可以，但 a 的表达式会变得复杂，不便于操作}.

由此：$H_h(z)=H_L(z)\Big|_{z^{-1}=-z^{-1}}$

② 此时数字低通滤波器的截止频率为：（2分）

∵ $z^{-1}=-z^{-1}$，$e^{-j\Omega_c}=-e^{-j\Omega_c}$ Ω：低通频率 Ω：高通频率

$e^{j\Omega_c}+e^{j\Omega_c}=0$，$\cos\left(\frac{\Omega_c+\Omega_c}{2}\right)=0$

∴ $\Omega_c+\Omega_c=\pi$，$\Omega_c=\pi-\Omega_c$.

- 3dB 截止：$\Omega_c=\pi-\Omega_c=0.5\pi$
- 阻带边界：$\Omega_u=\pi-\Omega_L=0.8\pi$
- 通带边界：$\Omega_L=\pi-\Omega_c=0.2\pi$ （3分）

注意点：信号与系统试卷解答（仅供参考）

③. 用双线性变换，将模拟低通滤波器的各阶变为：

3dB截频：$\omega_c = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_c}{2} = \frac{2}{T}$

阻带边频：$\omega_1 = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_1}{2} \doteq 3.078\cdot\frac{2}{T}$

通带边频：$\omega_2 = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_2}{2} \doteq 0.325\cdot\frac{2}{T}$ (2分)

④. 由题中对通带阻带要求

$$\begin{cases} 10\lg\frac{1}{1+\left(\frac{j\omega_1}{j\omega_c}\right)^{2N}} \le -25 \\ 10\lg\frac{1}{1+\left(\frac{j\omega_2}{j\omega_c}\right)^{2N}} \ge -0.1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2N\left(\lg\omega_1 - \lg\omega_c\right) = \lg\left(10^{2.5}-1\right) \doteq 2.498 \\ 2N\left(\lg\omega_2 - \lg\omega_c\right) = \lg\left(10^{0.01}-1\right) \doteq 0.023 \end{cases}$$

解不等式可得：$N_1 \doteq 2.56$，$N_2 \doteq 1.7$，取 $N=3$

则模拟低通滤波器的系统函数为：

$$H_c(s) = \frac{\omega_c^3}{s^3+2\omega_c s^2+2\omega_c^2 s+\omega_c^3}$$ 其中 $\omega_c = \frac{2}{T}$ (3分)

⑤. 将模拟低通滤波器的系统函数变为数字：

$$H_L(z) = H_L(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{T}\right)^3}{\left(\frac{2}{T}\right)^3\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3+2\left(\frac{2}{T}\right)\left(\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+2\left(\frac{2}{T}\right)^2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+\left(\frac{2}{T}\right)^3}$$

$$= \frac{(1+z^{-1})^3}{6+2z^{-2}}$$ (3分)

⑥. 将高通滤波器变为：

$$H_H(z) = H_L(z)\Big|_{z^{-1}=-z^{-1}} = \frac{(1-z^{-1})^3}{6+2z^{-2}}$$ (2分)

第 6 版共 6 版

中国科学技术大学

一九九七年招收硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：信号与系统

一. 已知用如下输入输出关系表示的两个线性时不变系统：一个为 $y(t)=x(t)+6\left[e^{-t}\int_0^t x(\tau)e^{\tau}d\tau-2\int_0^{\infty}x(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau\right]$ 表示的连续时间LTI系统；另一个为 $y[n]=x[n]-2x[n-1]+x[n-2]$ 表示的离散时间LTI系统。

1. 试分别求出它们的：a) 单位冲激响应 $h(t)$ 和 $h[n]$；b) 系统函数 $H(s)$ 和 $H(z)$，并画出各自的极点零点图；c) 求出频率响应 $H(\omega)$ 和 $H(e^{j\Omega})$，并概述出各自的幅频特性；d) 各自的线性常系数微分方程表示；e) 各自用三种基本单元实现出一种方框图或信号流图；f) 各自状态空间描述的 A, B, C, D 矩阵，要求 A 为对角阵。（36分）

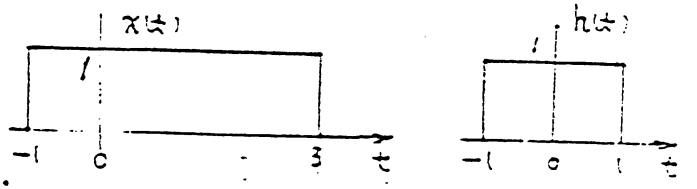
2. 这两个系统分别是否因果？是否稳定？（4分）

3. 它们各类什么滤波器？线性相位否？另一个系统是FIR还是IIR？（5分）

二. 已知：$x(t)\xrightarrow{F}X(\omega)$

$h(t)\xrightarrow{F}H(\omega)$

且 $x(t)$, $h(t)$ 波形如右图。



试求：1. $\int_{-\infty}^{\infty}X^*(\omega)H(-\omega)d\omega$；2. $\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\left|X(\omega)H^*(\omega)\right|^2d\omega$（12分）

三. 已知一离散时间LTI系统的单位冲激响应 $h[n]$，及序列 $x_0[n]$ 为：

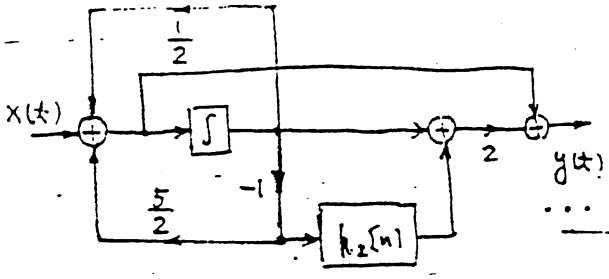
$$h[n]=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|n|}{2M+1}\right), & |n|\le 2M+1\\ 0, & |n|>2M+1\end{cases}\qquad x[n]=\begin{cases}a^n, & 0\le n\le M\\ 0, & \text{其它 } n\end{cases}$$

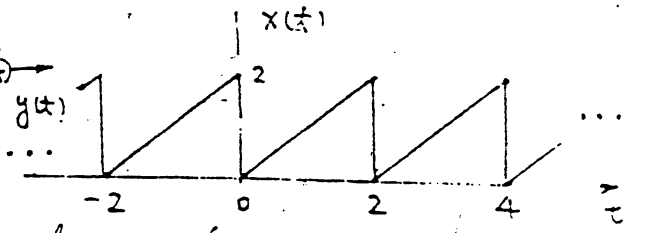
试求该系统在 $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_0[n-(2M+1)k]$ 输入时的输出 $y[n]$。（14分）

四. 某连续时间LTI系统如下图所示，其中：$\boxed{\int}$ 为积分器，

并已知 $h_2(t)=\dfrac{\sin t}{\pi t}$。

试题名称：信号与系统





试求当系统在右图周期输出波输入时的输出，并概画出波形。(10分)

五. 线性调频Z变换（CZT）是对一下N点序列的Z变换沿螺旋周线的等角间距取样（$z_k = AW^{-k}$, $k=0,1,\cdots,M-1$; A.W为任意复数）。

1. 根据以上定义，试导出CZT的表达式；（4分）
2. 可用快速卷积方法实现CZT，请给出运算步骤、相应公式和实现框图；（8分）
3. 若用CZT来计算一下N点DFT（N为奇数），试分析其运算量（仅指复数乘法运算次数）。（3分）

请注意：第一大题共45分，后面的题互有关联，务请仔细，以免前面小题出错影响后面小题出结果。

一中国科学技术大学一1997年攻读硕士研究生入学考试

《信号与系统》试题解答

一 解：连续时间LTI系统　　离散时间LTI系统

1.a) 系统输入输出关系可写成：

$y(t) = x(t) * [\delta(t) + 6e^{-t}u(t) - 12e^{-2t}u(t)]$

$y[n] = x[n] * [\delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]]$

$\therefore h(t) = \delta(t) + 6e^{-t}u(t) - 12e^{-2t}u(t)$ (5分)

$h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$ (2分)

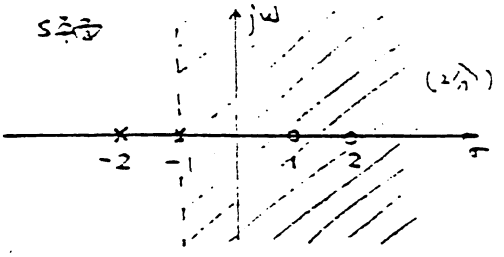
b) $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$

$= \dfrac{s^2-3s+2}{s^2+3s+2}$, $R_e\{s\} > -1$ (2分)

$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$

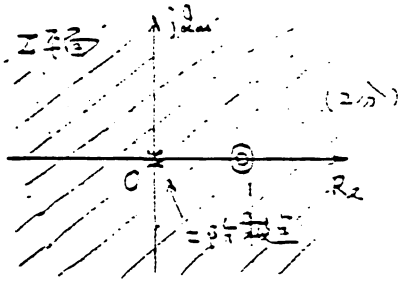
$= (1-z^{-1})^2$, $|z| > 0$ (1分)

S平面



(2分)

Z平面



(2分)

c) $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

$= \dfrac{2-\omega^2-3j\omega}{2-\omega^2+j3\omega}$ (1分)

指出系统是分布为全通系数.

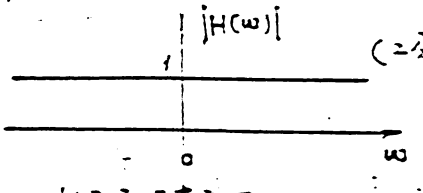
其幅频特性如下图.

$H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = (1-e^{-j\Omega})^2$

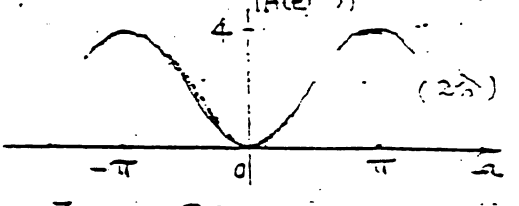
$= 4\sin^2(\frac{\Omega}{2})e^{j(\pi-\Omega)}$

$= 2(1-\cos\Omega)e^{j(\pi-\Omega)}$ (2分)

$|H(e^{j\Omega})| = 2(1-\cos\Omega)$



(2分)



(2分)

d) 微分方程表示为：

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t)$

$= x''(t) - 3x''(t) + 2x(t)$ (2分)

差分方程表示为：

$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$ (1分)

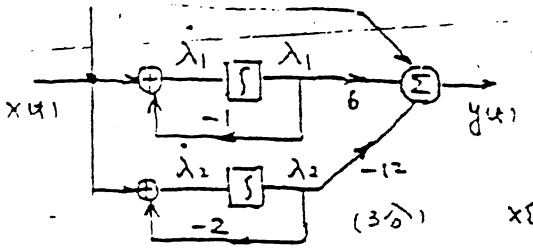
e) $H(s) = 1 + \dfrac{6}{s+1} - \dfrac{12}{s+2}$

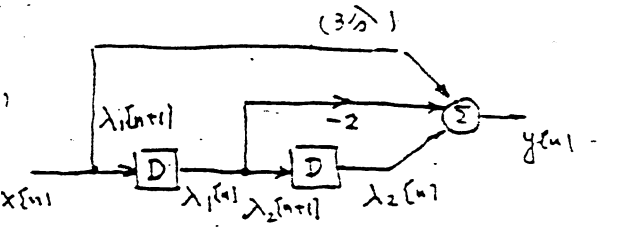
$H(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$

等价的卷积定理流图如下.

其卷积定理流图如下.

试题名称："信号与系统"试题解答.





1. A矩阵为对角化，即由其可获实现结构规范|状态方程描述，各由两个状态变量设置在两个积分器上. 则分别有

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 + x(t) \\ \dot{\lambda}_2 = -2\lambda_2 + x(t) \end{cases} \quad (3分)$$

$$y(t) = 6\lambda_1 - 12\lambda_2 + x(t)$$

$$\begin{cases} \lambda_1[n+1] = x[n] \\ \lambda_2[n+1] = \lambda_1[n] \end{cases} \quad (3分)$$

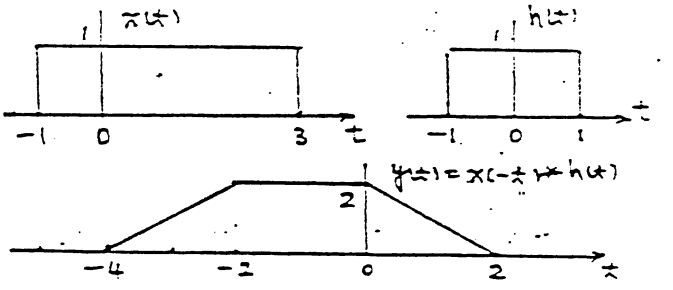
$$y[n] = -2\lambda_1[n] + \lambda_2[n] + x[n]$$

2. 同等 (1分) 稳定 (1分)　　同等 (1分) 稳定 (1分)

3 全通滤波器、非因果系统　　高通滤波器、线性相位、FIR系统

(1分) (1分)　　(1分) (1分) (1分)

二. 解：



1. ∵ x(t)为实信号

∴ $X^*(\omega) = X(-\omega)$

又 ∵ h(t)为实偶三角形

∴ $H(\omega) = H(-\omega) = H^*(\omega)$

则 $\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) H(-\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(-\omega) H(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\, d\omega = 2\pi y(0)$

其中 $Y(\omega) = X(-\omega) H(\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} y(t) = x(-t) * h(t)$

$y(t)$ 在原点处的值为三角形的面积，$y(0) = 2$

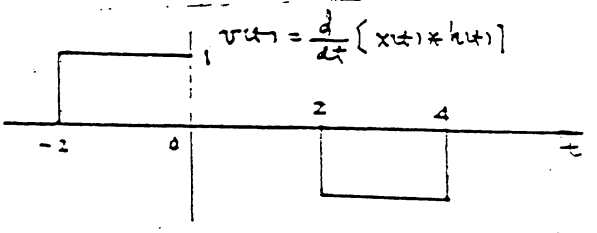
$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) H(-\omega)\, d\omega = 4\pi$ (6分)

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega) H^*(\omega)|^2 d\omega = \left(\frac{1}{j}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega)^2 |X(\omega) H(\omega)|^2 d\omega = \left(\frac{1}{j}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega Y_1(\omega)|^2 d\omega$

$\because j\omega Y_1(\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{d}{dt} y_1(t) = \left[\frac{d}{dt} x(t)\right] * h(t) = v(t)$

第　版共　版

$v(t)$ 之傅氏變換為



根據帕什瓦爾公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)H(\omega)|^2 d\omega$$

$$= -2\pi \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\,dt = -2\pi(2+2) = -8\pi \qquad (5分)$$

三. 解: $h[n] = \frac{1}{2M+1} r[n] * r[n]$ (2分)

其中 $r[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le M \\ 0 & |n| > M \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{R}(\Omega) = \frac{\sin\left[(2M+1)\frac{\Omega}{2}\right]}{\sin\frac{\Omega}{2}}$ (2分)

因此 此LTI系統之頻率響應為 $\tilde{H}(\Omega)$

$$\tilde{H}(\Omega) = \mathcal{F}\{h[n]\} = \frac{1}{2M+1}\tilde{R}(\Omega) = \begin{cases} 2M+1 & \Omega = 0 \\ 0 & \Omega = \frac{2\pi}{2M+1}k,\ k = 1, 2, \cdots, M \end{cases} \quad (2分)$$

$x[n]$ 為週期訊號. 其DFS為分析公式為

$$x[n] = \sum_{k=-M}^{2M} \tilde{X}_k e^{jk\Omega_0 n}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{2M+1} \qquad (2分)$$

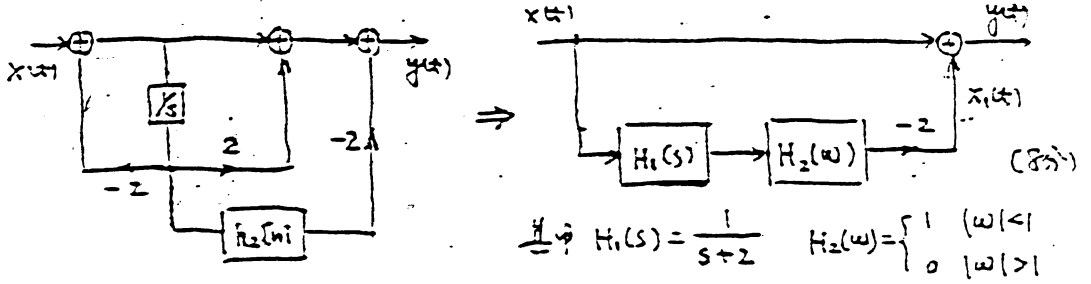
則 LTI系統之輸出 $y[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-M}^{2M} \tilde{X}_k \tilde{H}(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} = \tilde{X}_0 \tilde{H}(0) \qquad (2分)$$

$$\tilde{X}_0 = \frac{1}{2M+1}\sum_{n=0}^{2M} x[n] = \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} a^n = \frac{1}{2M+1}\cdot\frac{1-a^{M+1}}{1-a} \qquad (2分)$$

故 $y[n]$ 為一常數信號. 即 $y[n] = \frac{1-a^{M+1}}{1-a}$. $-\infty < n < \infty$ (2分)

四. 解: 圖示系統可重畫為:



(8分)

其中 $H_1(s) = \frac{1}{s+2}$ $H_2(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$

試題各系:

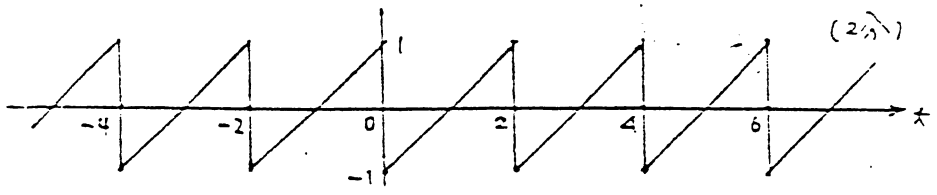
$x(t)$ 为 $T=2$ 之断点周期信号，其傅里叶级数为

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{2}=\pi.$$

由于 $H_2(\omega)$ 为截止频率为 $\omega_c=1$ 的理想低通滤波器，故只有通过 $x(t)$ 的直流分量，即 $X_0=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt=1$ (2分)

$$x_1(t)=-2H_1(0)H_2(0)X_0=-1 \qquad -\infty<t<\infty \quad (2分)$$

故 $y(t)=x(t)+x_1(t)=x(t)-1$. 波形如下图示



(2分)

三. 解：

1. CZT是对 Z 变换在 $z_k=AW^{-k}$ 上取样，即

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]z^{-n}\Big|_{z=z_k}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]A^{-n}W^{nk} \qquad k=0,1,2,\cdots,M-1$$

利用 Bluestain 等式 $nk=\frac{1}{2}\left[n^2+k^2-(k-n)^2\right]$

则有：$X(z_k)=W^{\frac{1}{2}k^2}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]A^{-n}W^{\frac{1}{2}n^2}W^{-\frac{1}{2}(k-n)^2}$，$k=0,1,\cdots,M-1$ (4分)

2. 实现步骤

1) 选择合适 $L>N+M-1$，且 $L=2^m$ 中满足要求的 L (1分)

2) 定义序列

$$f[n]=\begin{cases} A^{-n}W^{\frac{1}{2}n^2}x[n] & 0\le n\le N-1 \\ 0 & N\le n\le L-1 \end{cases}$$

3) 对 $f[n]$ 作 DFT，即

$$F(r)=\mathrm{DFT}\{f[n]\}, \qquad r=0,1,2,\cdots,L-1 \quad (2分)$$

4) 再定义序列，

第 版共 版

$$h[n]=\begin{cases} W^{-\frac{1}{2}n^2} & 0\le n\le M-1 \\ 任意 & M\le n\le L-N \\ W^{-\frac{1}{2}(n-L)^2} & L-N-1\le n\le L-1 \end{cases}$$

(3) FFT对 $h[n]$ 作 DFT，得

$$H(r)=DFT\{h[n]\} \qquad r=0,1,2,\cdots,L-1 \quad (2分)$$

4) 将 $F(r)$ 与 $H(r)$ 进行相乘，得

$$G(r)=F(r)H(r) \qquad r=0,1,2,\cdots,L-1$$

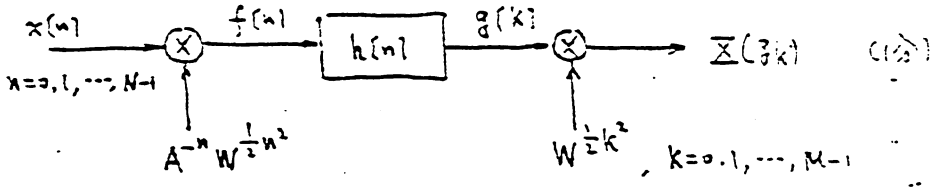
对 $G(r)$ 作 IDFT，得

$$g(k)=IDFT\{G(r)\} \qquad k=0,1,2,\cdots,L-1 \quad (1分)$$

5) 取 $g(k)$ 前 M 点与 $W^{\frac{1}{2}k^2}$ 相乘，完成 CZT

$$\hat{X}(z_k)=W^{\frac{1}{2}k^2}g(k) \qquad k=0,1,2,\cdots,M-1 \quad (1分)$$

实现上述步骤，CZT 实现框图为：



(1分)

3. 用 CZT 计算 N 点 DFT，即 $M=N$。所需复乘法次数分别为：

形成 $f[n]$	N 次
基2 FFT 计算 $F(r)$	$\frac{1}{2}L\log_2 L$ 次
基2 FFT 计算 $H(r)$	$\frac{1}{2}L\log_2 L$ 次
$F(r)H(r)$	L 次
基2 IFFT 计算 $g(k)$	$\frac{L}{2}\log_2 L$ 次
形成 N 点 $\hat{X}(z_k)$	N 次

共计：$\frac{3}{2}L\log_2 L+L+2N$ 次 (3分)

试题名称：

中国科学技术大学

一九九八年招收硕士学位研究生入学考试试题
试题名称：信号与系统

一、试求下列各小题：（每小题8分）

1、 $x(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ 的频谱 $X(\omega)$，并概画出 $X(\omega)$ 的图形；

2、 $X(s)=\dfrac{-se^{-s}}{s^2+4s+5}, R_e\{s\}>-2$，试求其反拉氏变换 $x(t)$；

3、 $h[n]=\sum_{k=0}^{M}\dfrac{M!}{(M-K)!K!}\delta[n-k]$，M 为偶数，试求频率响应 $H(\Omega)$，并概画出 M=4 时的 $H(\Omega)$ 图形；

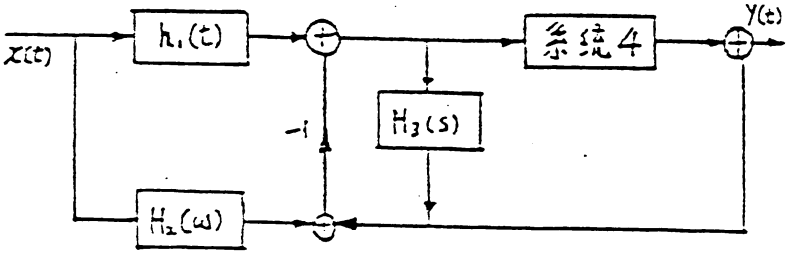
4、 $X(z)=\dfrac{1}{z-1-z^{-N+1}+z^{-N}}, |z|>1$；试求反 Z 变换 $x[n]$.

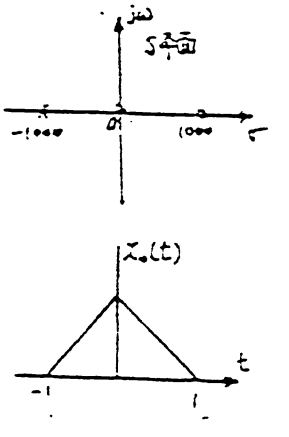
二、由如下差分方程描述的离散时间因果系统

$$y[n]-\frac{1}{3}y[n-1]=x[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=-\infty}^{n-1}x[k]\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}$$

已知 $y[-1]=-3$，试求当输入 $x[n]=u[n]$ 时系统的输出 $y[n]$，并写出其中的零输入响应和零状态响应分量。（12分）

三、下图所示的连续时间 LTI 系统



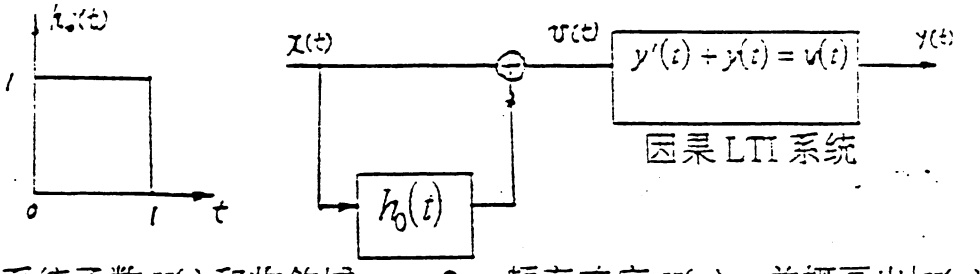


已知：$h(t)=\frac{\sin t}{\pi t}$，$H_2(\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega} & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$　$H_3(s)=\frac{1}{s}$；系统4为一个因果LTI系统，其零、极点图如右上图所示，且其直流增益等于1。

试求：1、当$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_0(t-4n)$，$x_0(t)$的波形如右下图所示，试求输出$y(t)$；（6分）

2、该LTI系统的单位冲激响应$h(t)$。（10分）

四、如下图所示的连续时间LTI系统，试求或写、画出该系统的：



1、系统函数$H(s)$和收敛域；　2、频率响应$H(\omega)$，并概画出$|H(\omega)|$；

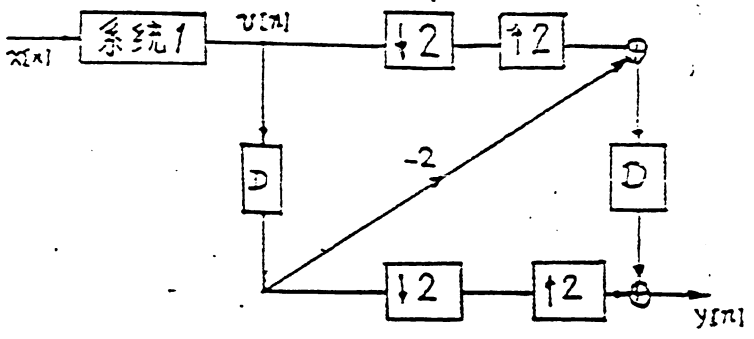
3、单位冲激响应$h(t)$，并概画出其波形；　4、微分方程表示；

5、用相加器、数乘器、积分器和连续时间延时系统实现它的方框图。

（每小题4分，共20分）

五、如下图所示的离散时间系统，其中：系统 1 为差分方程

$v[n]-\frac{1}{2}v[n-1]=x[n]$表示的因果 LTI 系统；图中符号“→D→”为单位延时，$x[n]$ → ↓2 → $y[n]$ 为 2:1 抽取，即 $y[n]=x[2n]$，而 $x[n]$ → ↑2 → $y[n]$ 为 2:1 内插零，即 $y(n)=x_{(2)}[n]=\begin{cases}x\left[\frac{n}{2}\right] & n\text{为偶数}\\ 0 & n\text{为奇数}\end{cases}$



试求：1、该系统的差分方程表示（8 分）

提示：先考虑从 $v[n]\to y[n]$ 的系统可等价为一个因果 LTI 系统

2、该系统的系统函数 $H(s)$，并概画出零、极点和收敛域图形（3 分）

3、该系统的频率响应 $\tilde{H}(\Omega)$，并概画出其幅频响应 $|\tilde{H}(\Omega)|$（3 分）

4、该系统的单位冲激响应 $h(t)$（3 分）

5、用离散时间三种基本单元实现的方框图，要求最经济的实现。（3 分）

中国科学技术大学

一九九八年招收硕士学位研究生入学考试参考答案

试题名称：信号与系统

一. 1. 由傅里叶变换对：$e^{-|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{\omega^2+1}$ (1分)

和傅里叶变换的对偶性质，则有如下变换对

$$\frac{1}{t^2+1} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi e^{-|\omega|} \quad (2分)$$

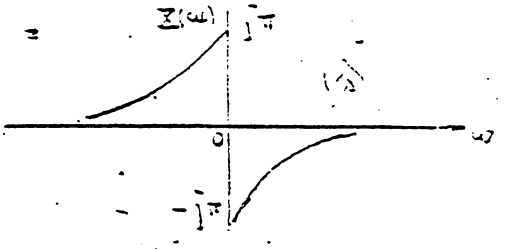
又由傅里叶变换的性质，$-jtx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d}{d\omega}X(\omega)$，则有

$$\mathcal{F}\left\{\frac{t}{t^2+1}\right\} = j\frac{d}{d\omega}(\pi e^{-|\omega|}) = j\pi\frac{d}{d\omega}\left[e^{-\omega}u(\omega) + e^{\omega}u(-\omega)\right]$$

$$= j\pi\left[e^{-\omega}\delta(\omega) - e^{-\omega}u(\omega) - e^{\omega}\delta(\omega) + e^{\omega}u(-\omega)\right]$$

$$= j\pi\left[e^{\omega}u(-\omega) - e^{-\omega}u(\omega)\right] =$$

$$= j\pi e^{-|\omega|}\operatorname{sgn}(-\omega) \quad (4分)$$



(1分)

2. $X(s)$ 可写成

$$X(s) = \frac{-se^{-s}}{s^2+4s+5} = \left[\frac{-(s+2)}{(s+2)^2+1^2} + \frac{2}{(s+2)^2+1}\right]e^{-s}, \quad R_e\{s\} > -2 \quad (2分)$$

利用 $e^{-at}\cos\omega_0 t\,u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{(s+a)^2+\omega_0^2}$, $R_e\{s\} > -a$ (1分)

$$e^{-at}\sin\omega_0 t\,u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0}, \quad R_e\{s\} > -a \quad (1分)$$

及利用拉氏变换的时移性质，则有

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\frac{-(s+2)}{(s+2)^2+1^2} + \frac{2}{(s+2)^2+1^2}\right]e^{-s}\right\}$$

$$= e^{-2(t-1)}\left[2\sin(t-1) - \cos(t-1)\right]u(t-1) \quad (4分)$$

3. $H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{k=0}^{M}\frac{M!}{(M-k)!\,k!}e^{-jk\omega}$

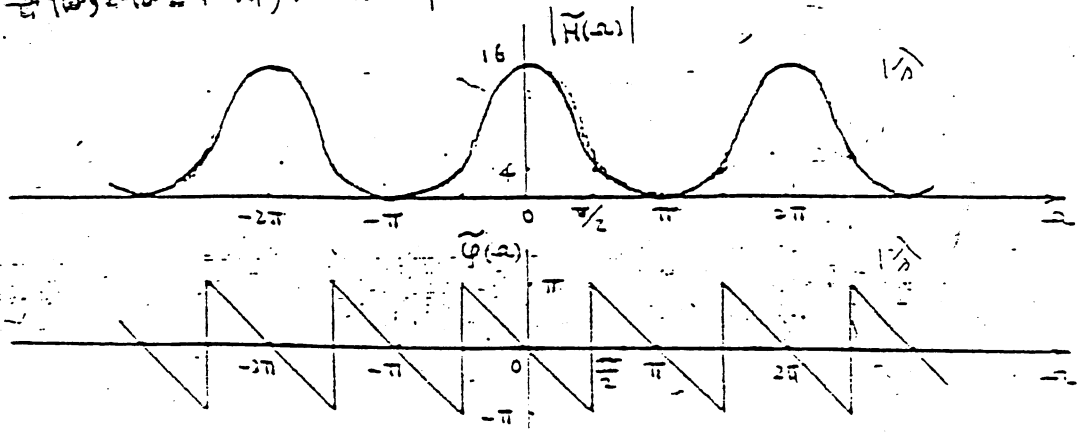
$$= (1+e^{-j\omega})^M = (2j)^M e^{-j\frac{M}{2}\omega}\cos^M\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

(4分)

信号与系统试题答案

$M=4$ 일 때, $\tilde{H}(\omega) = 16\, e^{-j2\omega} \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)$ 2점

$|\tilde{H}(\omega)|$, $\tilde{\varphi}(\omega)$ 의 개형을 각각 그리시오. 각 1점



4. $X(z)$ 를 구하면

$$X(z) = \frac{1}{\beta^{-1} - \beta^{-N+1} + \beta^{-N}} = \frac{\frac{1}{1-\beta^{-1}}\beta^{-1}}{1-\beta^{-N}} \quad |\beta| > 1$$ 2점

따라서 $\frac{1}{1-\beta^{-1}}$, $|\beta|>1 \longleftrightarrow u[n]$. 따라서 $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{\beta^{-1}}{1-\beta^{-1}}, |\beta|>1\right\} = u[n-1]$ 2점

따라서 위에서 구한 $X(z)$ 의 역변환은

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{1-\beta^{-1}}\beta^{-1}}{1-\beta^{-N}}, |\beta|>1\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} u[n-1-2Nk]$$ 4점

5. 주어진 차분방정식의 양변에 z 변환을 취하면

$$x[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]\left(\frac{1}{2}\right)^{-k} = x[n] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$= x[n] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n-1-k]$$

$$= x[n] - \frac{1}{2}\, x[n] * \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

따라서 주어진 차분방정식은

$$y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}\, x[n] * \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$ 4점

양변을 z 변환하고 $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\}$, $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ 라 하면

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) - \frac{1}{3}y[-1] = X(z)\left[1 - \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]$$

$$Y(z) = X(z)\frac{1-z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$ 2점

(나) 또는 (다) 중 하나를 선택하여 답하시오. 단, 두 개 이상 답한 경우 앞에 서술한 하나만 채점함.

$X(z) = Z\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$ 代入上述表達式

$$Y(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

利用部分分式展開

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{B_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B_2}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{(B_1+B_2) - (\frac{B_1}{3}+\frac{B_2}{2})z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

則有 $\begin{cases} B_1+B_2=1 \\ -\frac{B_1}{3}-\frac{B_2}{2}=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} B_1=3 \\ B_2=-2 \end{cases}$

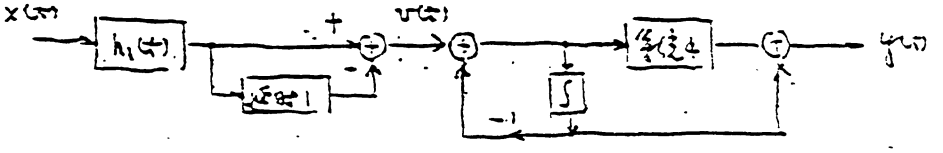
故有 $Y(z) = \frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$

取逆變換得 $y[n] = 3(\frac{1}{2})^n u[n] - 3(\frac{1}{3})^n u[n]$ 4分

其零狀態響應 $y_{zs}[n] = -(\frac{1}{3})^n u[n]$ 1分

零輸入響應 $y_{zi}[n] = 3(\frac{1}{2})^n u[n] - 2(\frac{1}{3})^n u[n]$ 1分

三. 給出由LTI子系統互聯而成的系統如下圖



其中 $H_1(\omega) = F\{h_1[n]\} = \begin{cases} 1 & |\omega|<1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases}$ 為一截止頻率為1的理想低通濾波器 2分

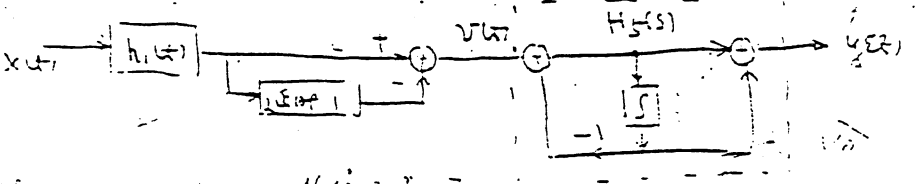
1. 當 $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(t-4n)$ 由周期為4之周期信號在一個周期內之值構成的輸入時

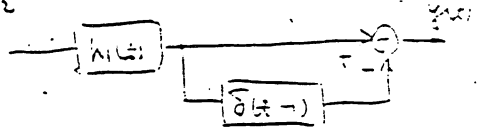
其基波頻率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$，大於 $H_1(\omega)$ 之截止頻率 故只有

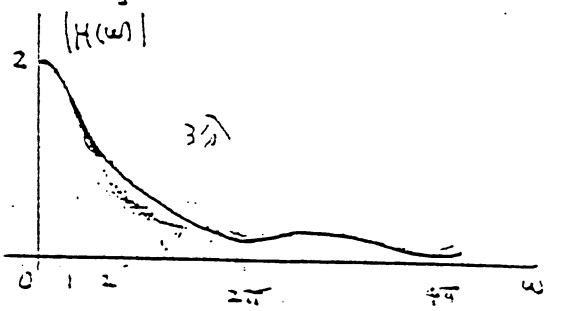
其直流分量才能通過 $H_1(\omega)$

$x(t)$ 之直流分量為 $a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x_0(t)\,dt = \frac{1}{4}$ 3分

故 $v(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ 因此 $y[n] = 0$ 1分





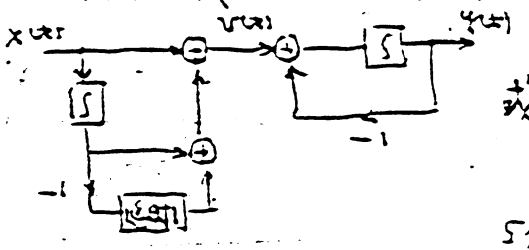


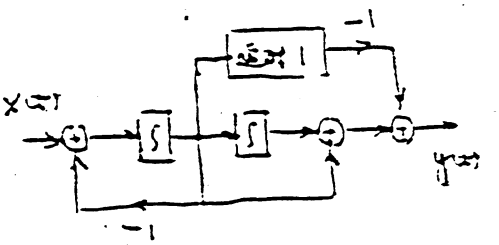
3.



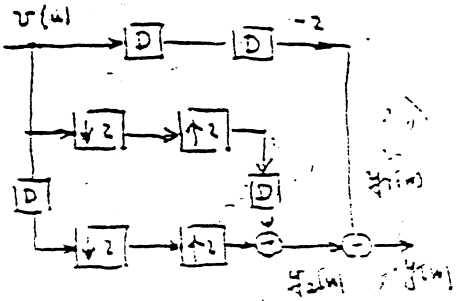
4.

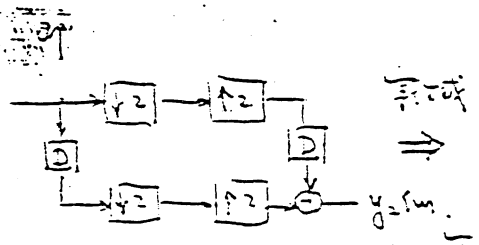
5.

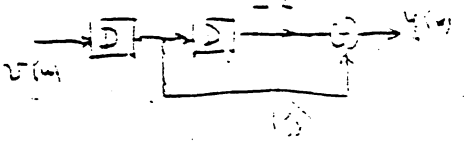


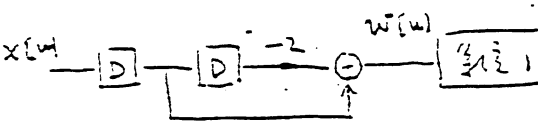


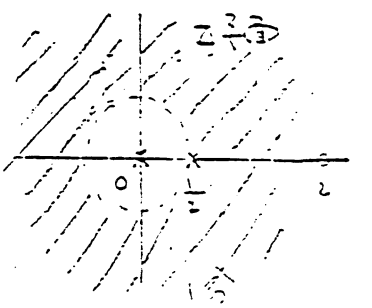
5分

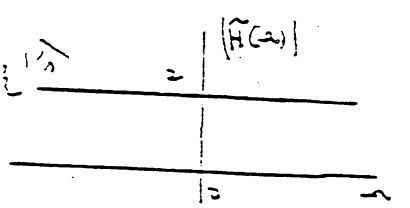












4. 求此系統的單位脈衝響應 $h[n]$.

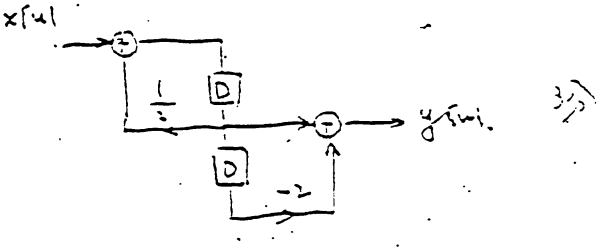
第一個子系統的單位脈衝響應為 $h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

第二個子系統 " $h_2[n] = \delta[n-1] - 2\delta[n-2]$

故 $h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$

$= \delta[n-1] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$ 3分

5. 畫出下列差分方程式所代表的系統方塊圖.



3分

信號與系統 期末考 第4頁共4頁

中国科学技术大学

一九九九年招收硕士学位研究生入学考试试卷

试题名称：信号与系统

一. 本题包含五个小题，每小题 8 分，共 40 分。

1) 试求如下连续时间信号 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$，并概画出 $X(\omega)$ 的函数图形。

$$x(t)=\begin{cases}(1-|t|)e^{-j(\pi/2)}[\sin 5\pi t+j\cos 5\pi t], & |t|\le 1\\ 0\ , & |t|>1\end{cases}$$

2) 已知离散时间序列 $x[n]$ 的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 为

$$X(e^{j\Omega})=\frac{\pi}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin[7k(\pi/16)]}{\sin[k(\pi/16)]}e^{-j3(\pi/8)}\delta\left(\Omega-k\frac{\pi}{8}\right)$$

试问 $x[n]$ 是什么信号？若是是能量信号，试计算其能量；若是功率受限信号，则计算其平均功率。

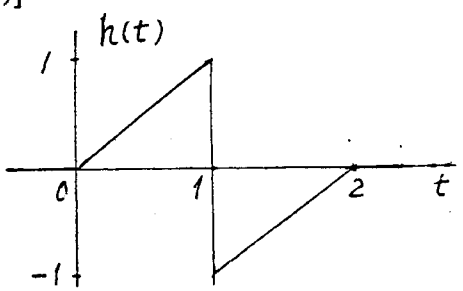
3) 试概画出如下连续时间信号 $x(t)$ 的波形，并求其双边拉普拉斯变换及其收敛域。

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-e^{-2(t-n)}\right)[u(t-n)-u(t-n-1)]$$

4) 试求如下 Z 变换的反 Z 变换：

$$X(z)=\ln\left(\frac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}}\right),\quad |z|>1>|a|$$

5) 某连续时间 LTI 系统的 $h(t)$ 如右图所示，试求当输入 $x(t)=\pi[\delta(t)-\pi\sin\pi t u(t)]$ 时，系统的输出 $y(t)$，并概画出其波形。



二. 对于如下方程表示的连续时间因果 LTI 系统，试求：

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-2(t-\tau)}\left[\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2}+2\frac{dx(\tau)}{d\tau}+x(\tau)\right]d\tau$$

1) 该系统的系统函数 $H(s)$，并概画出其零、极点图和收敛域；(6 分)

2) 试求并概画出该系统的单位冲激响应 $h(t)$；(4 分)

3) 若系统稳定，概画出其幅频响应和相频响应。它是什么滤波器？(4 分)

4) 以级联结构形式、用连续时间积分器、相加器和数乘器实现该系统，画出其方框图或信号流图。(6 分)

三. 设一个连续时间能量信号 $x(t)$，通过单位冲激响应为 $h(t)$ 的稳定连续时间 LTI 系统，得到输出是 $y(t)$。假设连续时间稳定 LTI 系统的延迟时间 t_h 定义为 $t_h=t_y-t_x$。其中：t_y 和 t_x 分别为该系统的输入和输出能量信号的时域分布重心，即

$$t_x=\int_{-\infty}^{\infty}tx(t)\,dt\Big/\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,dt\qquad 和\qquad t_y=\int_{-\infty}^{\infty}ty(t)\,dt\Big/\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\,dt$$

可以证明，上述定义的系统延时时间与输入信号无关，仅与系统有关。试求出用 $h(t)$ 表示系统延时时间 t_h 的表达式。(本题 10 分)

四. 离散时间90°移相器的频率响应$H(e^{j\Omega})$在主值区间$(-\pi,\pi)$内为

$$H(e^{j\Omega})=-j\,\mathrm{sgn}(\Omega),\quad -\pi<\Omega<\pi$$

1) 试画出其幅频响应$|H(e^{j\Omega})|$和相频响应$\varphi(\Omega)$；(2分)

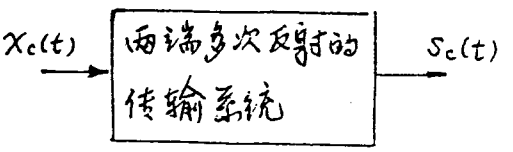
2) 试求并概画出其单位冲激响应$h[n]$，并确定该系统是否因果？是否稳定？(5分)

3) 现用一个矩形加窗的$2N+1$因果数字滤波器$h_d[n]$来逼近90°移相器，即

$$h_d[n]=\begin{cases}h[n-N], & 0\le n\le 2N\\ 0, & n<0, n>2N\end{cases}$$

试概画出数字滤波器的频率响应$H_d(e^{j\Omega})$，并讨论参数N和窗形状对逼近的90°移相器性能的影响。(8分)

五. 长途电信网中信号传输常有反射现象，若反射信号为$x_c(t)$，经两端多次反射到接收端的信号为



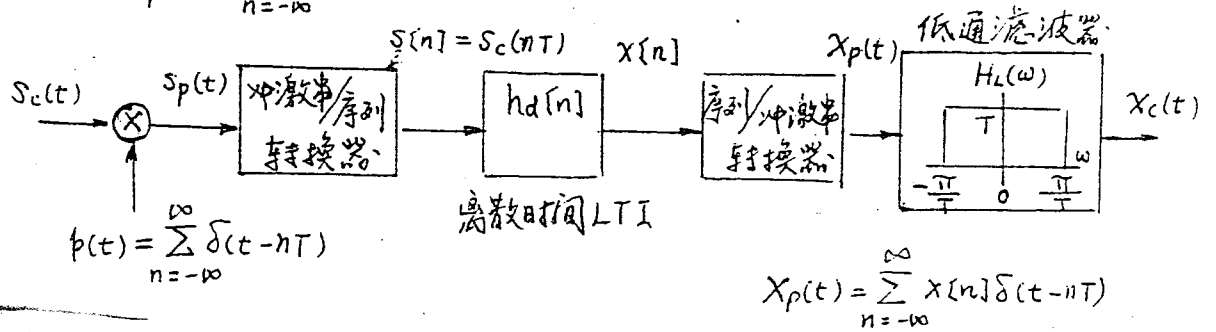
$$s_c(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l x_c(t-lT_0)$$

其中：信号来回反射一次的衰减为α，延时为T_0。

1) 试问从$x_c(t)$到$s_c(t)$的系统是否是的LTI系统，若是，试写出它的$h(t)$，它因果稳定码？然后求出它的逆系统的单位冲激响应$h_1(t)$，这个逆系统因果、稳定吗？并画出用连续时间相加器、数乘器和纯延时器构成$h(t)$和$h_1(t)$的方框图。如果该逆系统能够实现，让接收信号$s_c(t)$通过它，就能恢复出$x_c(t)$。但这个逆系统实际实现时有什么困难？(7分)

2) 如果$x_c(t)$是带限于ω_M的带限信号，即其频谱$X_c(\omega)=0$，$|\omega|>\omega_M$，可以用离散时间(数字)信号处理的方法，从$s_c(t)$中恢复出$x_c(t)$，处理的方框图如下：

$$s_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_c(nT)\delta(t-nT)$$



若已知反射延时T_0满足：$\pi/\omega_M<T_0<\pi/2\omega_M$，取抽样间隔$T=T_0/2$，试求上图中数字滤波器的单位冲激响应$h_d[n]$，写出其差分方程表示，并画出它用三种离散时间基本单元构成的系统方框图或信号流图。(8分)

说明：请看清题意和题中要求，特别是要求画图的必须画出波形或函数图形。

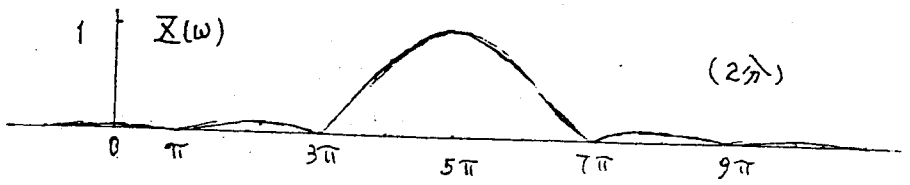
中国科学技术大学

一九九九年招收硕士学位研究生入学考试试题解答

试题名称：信号与系统

一. 1. $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$ 及其频谱图形如下：

$$X(\omega) = Sa\left(\frac{\omega - 5\pi}{2}\right) \quad (6分)$$



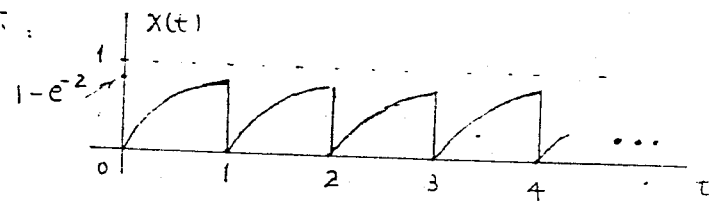
2. $x[n]$ 是周期 $N=16$ 的离散时间信号 是属于功率受限信号 周期矩形 其平均功率 P 为：

即 $x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 6 \\ 0 & 6 < n \le 15 \end{cases}$ (在一个周期内) (4分)

其平均功率为

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{15} x^2[n] = \frac{7}{16} \quad (4分)$$

3. $x(t)$ 的波形如下：(2分)



其拉氏变换为：

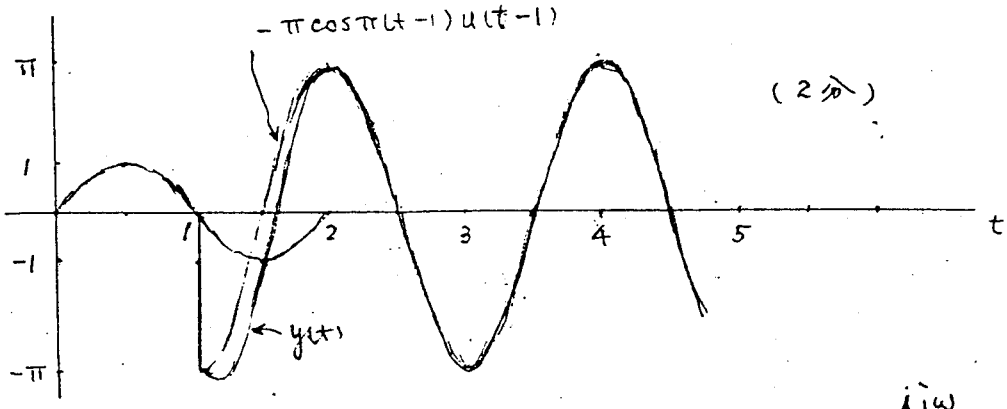
$$X(s) = \frac{1 - \left[1 - (1-e^{-2})se^{-s}\right]}{(s^2+s)(1-e^{-s})}, \quad \text{收敛域：} \mathrm{Re}\{s\} > 0 \quad (6分)$$

4. $X(s)$ 为反Z变换获得的离散时间序列 $x[n]$ 为

$$x[n] = \frac{1-a^n}{n}u[n-1] \quad (8分)$$

5. $y(t) = \sin \pi t\left[u(t) - u(t-2)\right] - \pi \cos \pi(t-1)\,u(t-1)$ (6分)

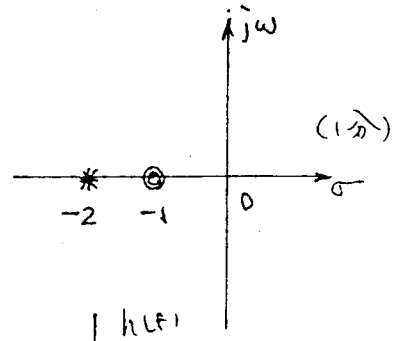
其波形如下图所示



（2分）

二. 1. 系统函数和收敛域为 （5分）

$$H(s)=\frac{(s+1)^2}{(s+2)^2},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-2$$

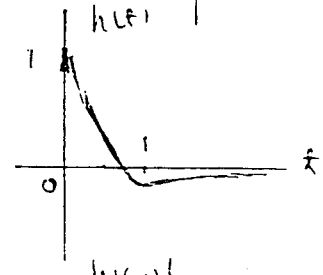


（1分）

零极点图如右图所示

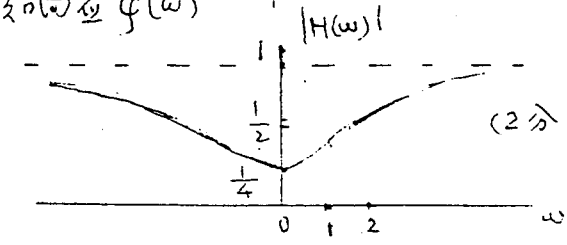
2. 单位冲激响应 $h(t)$ 为 （4分）

$$h(t)=\delta(t)+e^{-2t}u(t)-2te^{-2t}u(t)$$



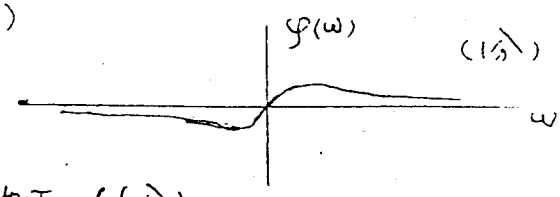
波形如右图

3. 幅频响应 $|H(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi(\omega)$ 如右图所示。



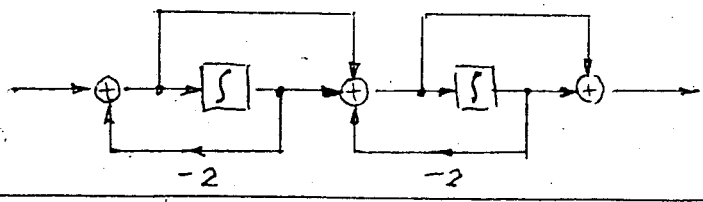
（2分）

该系统是高通滤波器，又是最小相移滤波器（或最小相移系统）（1分）



（1分）

4. 系统的级联实现方框图如下 （6分）



其中：

S 为积分器

三.

$$t_h = t_y - t_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t\,y(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,dt} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t\,x(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt}$$

$$= \frac{j\frac{dY(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=0}}{Y(0)} - \frac{j\frac{dX(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=0}}{X(0)}$$

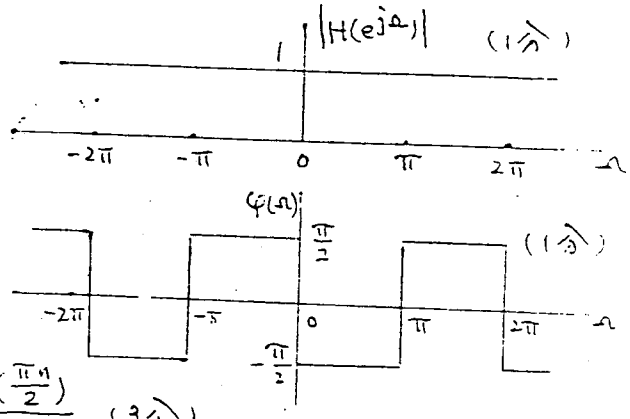
$$= \frac{j\left\{\frac{d}{d\omega}H(\omega)X(\omega)\right\}\Big|_{\omega=0}}{H(0)X(0)} - \frac{jX'(0)}{X(0)}$$

$$= \frac{j[H(0)X'(0) + X(0)H'(0)]}{H(0)X(0)} - \frac{jX'(0)}{X(0)}$$

$$= \frac{jH'(0)}{H(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t\,h(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt}$$ (10分)

四. 1. 幅频响应 $|H(e^{j\Omega})|$

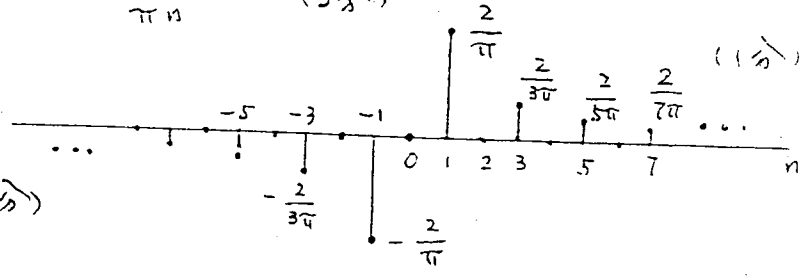
相频响应 $\varphi(\Omega)$ 如右



2. $h[n] = \frac{1-(-1)^n}{\pi n} = \frac{2\sin^2(\frac{\pi n}{2})}{\pi n}$ (3分)

其序列图形如右。

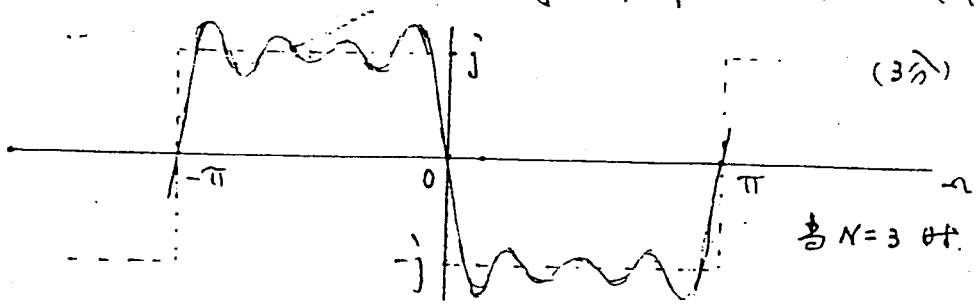
系统为非因果、但稳定。 (1分)



3. $H_d(e^{j\Omega}) = \left[H(e^{j\Omega}) \circledast \frac{1}{2\pi}H_{2N+1}(e^{j\Omega})\right]e^{-j\Omega N}$ (3分)

其中 $H_{2N+1}(e^{j\Omega}) = \frac{\sin[(2N+1)\Omega/2]}{\sin(\Omega/2)}$ 为 $2N+1$ 点偏对称矩形序列的离散时间傅里叶变换。因此除了一个相移因子 $e^{-j\Omega N}$ 外，

$H_d(e^{j\Omega})$ 幅频如下 $(-\pi,\pi)$ 主值区间内，即 $H_d(e^{j\Omega})e^{j\Omega N}$ 如下图实



(3分)

当 $N=3$ 时

讨论：1. 矩形窗使 90° 移相器出现频率响应有较大的波动，方法如(2分)　这种波动，应选用更平滑的窗如哈明窗。

2. 有限长截短时 90° 移相器在 $\Omega=0$ 和 $\Omega=\pi$ 也移过了它们应有的 90° 移相功能，且 N 愈大，这愈甚，特性愈逼近 90° 移相特性

3. 由于利用因果性设计器，H_d 已有一个线性相位因子 $e^{-jN\Omega}$，即使通过之后也相当 N 点延时。

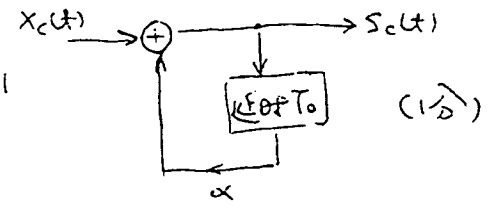
五. 1. 该系统为因果的 LTI 系统，其单位冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\delta(t-kT_0)$$

当 $|\alpha|<1$ 方稳定 (2分)

其系统函数为 (2分)

$$H(s)=\frac{1}{1-\alpha e^{-sT_0}}\qquad |\alpha|<1$$



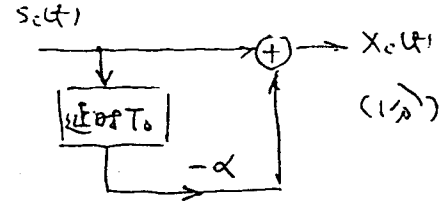
(1分)

之回路模拟图如右

之逆系统函数为 $H_I(s)$ (1分)

$$H_I(s)=1-\alpha e^{-sT_0}\qquad |\alpha|<1$$

其系统模拟图如右下图



(1分)

之可把 $s_c(t)$ 恢复出 $x_c(t)$.

但延时 T_0 的延时系统很难实现，或实现的性能不好。

2. 当抽样间隔取 $T = T_0/2$ 时，满足抽样定理，不会产生混叠。

且当有当 $x[n] = x_c(nT)$ 时，才能重构出 $x_c(t)$ (1分)

而 $s[n] = s_c(nT) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l x_c((n-2l)T)$

$= \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l x[n-2l]$ (3分)

令 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ ， $s[n] \xleftrightarrow{Z} S(z)$

则 $H_d(z) = \frac{X(z)}{S(z)} = \frac{X(z)}{Z\{\sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l x[n-2l]\}}$

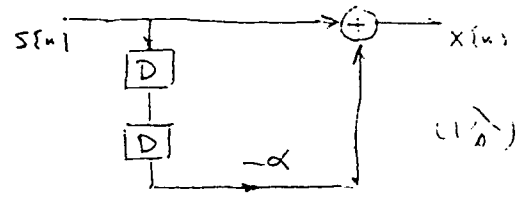
$= \frac{1}{\sum_{l=0}^{\infty} (\alpha z^{-2})^l} = 1 - \alpha z^{-2}$ $|z| > 0$ (2分)

取 $h_d[n]$ 为一个两点的 FIR 滤波器，即

$h_d[n] = \delta[n] - \alpha\delta[n-2]$ (1分)

其实现结构如下图

其中 $\boxed{D}$ 为单位延时。



(1分)

中国科学院

2000年招收攻读硕士学位研究生入学考试试卷

科目：信号与系统

一、对于图 1(a)和(b)所示的连续和离散时间因果 LTI 系统，试分别求他们的：（共 28 分）

1. 系统函数 $H(s)$ 或 $H(z)$，并概画出各自的收敛域和零、极点图；（8 分）
2. 频率响应 $H(\omega)$ 或 $\tilde{H}(\Omega)$，并概画出各自的幅频特性和相频特性；（5 分）
3. 单位冲激响应 $h(t)$ 或 $h[n]$，并概画出各自的波形或序列图形；（5 分）
4. 微分方程或差分方程表示；（2 分）
5. 写出各自用最少数目状态变量描述的、A 矩阵对角化的状态方程和输出方程，并画出响应的方框图表示或信号流图。（8 分）

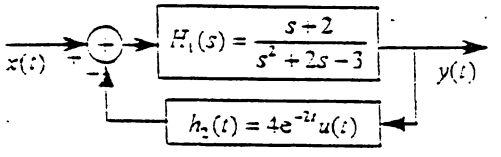


图 1(a)

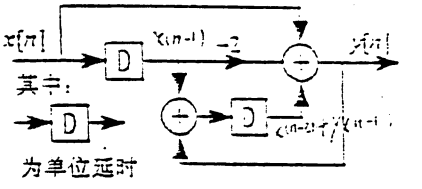
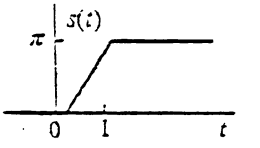


图 1(b)

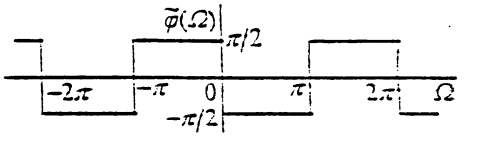
二、试求下列各小题：（每小题 8 分，共 32 分）

1. 某连续时间 LTI 系统的单位冲激响应 $s(t)$ 如右图所示，试求当输入信号 $x(t)$ 时该系统的输出 $y(t)$ 为，并概画出其波形。（8 分）



$$x(t)=\begin{cases}\sin \pi t, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

2. 某离散时间 LTI 系统的幅频响应 $|\tilde{H}(\Omega)|=1$，相频特性 $\tilde{\varphi}(\Omega)$ 如右图所示，试求其单位冲激响应 $h[n]$，并概画出 $h[n]$ 的序列图形（8 分）



3. 已知某离散时间序列 $x[n]$ 的 Z 变换为 $X(z)=\frac{z-2-z^{-1}}{1-z^{-6}}$，$\infty>|z|>1$，试求 $x[n]$，并概画出其序列图形。（8 分）

4. 已知电流信号 $i(t)=\frac{\sin(2\pi\times10^3 t)}{2\pi\times10^3(t-10^{-3})}$ 安培，它是能量受限信号还是功率受限信号？并计算它在 1 kΩ电阻上消耗的能量或功率，若对它进行抽样，不产生混叠失真的最大抽样间隔 T_{max} 是多少。（8 分）

39

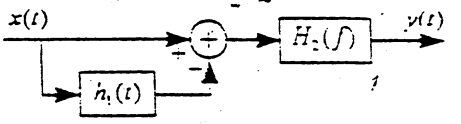
三、假设你已拥有计算 DFT 的 FFT 程序，请给出直接用此程序计算如下 N 点 IDFT(逆 DFT)的两种不同的方法，并证明你所采用的方法。（10 分）

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n},\quad n=0,\ 1,\ 2\ \Lambda\ \ N-1$$

四、数字传输系统中修正的双二进制基带部分响应系统的方框图如右图所示，图中：

$h_1(t)=\delta(t-2T)$，T 为位间隔；

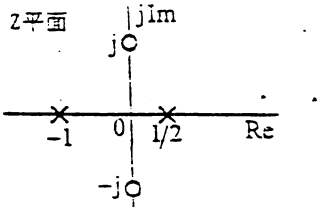
$H_2(f)=\begin{cases}T, & |f|<1/2T\\ 0, & |f|>1/2T\end{cases}$，其中 f 是以 Hz 为单位的频率。试求：



1. 系统的频率响应 $H(f)$ 和单位冲激响应 $h(t)$，并概画出它们的波形或函数图形。（12 分）
2. 如果二进制数字“1”和“0”分别用 $\delta(t)$ 和 $-\delta(t)$ 表示，对于位间隔为 T 的二进制数字“1101”信号 $x(t)$，试概画出它通过该系统后的输出 $y(t)$。（2 分）

   提示：$x(t)=\delta(t)+\delta(t-T)-\delta(t-2T)+\delta(t-3T)$

五、有某个“起始不松弛”的离散时间因果系统，其中的因果 LTI 系统的零，极点分布如右图所示。试求：



1. 该系统对输入为 $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{3}\right)$ 时的零状态响应：

   这个因果 LTI 系统是 FIR 系统还是 IIR 系统？（4 分）
2. 若又已知该系统对常数序列输入的稳态增益(因果 LTI 系统的常数增益)为 4/3，且已知非零起始条件为 $y[-1]=3$ 和 $y[-2]=9$。试求该系统在输入为 $x[n]=(1/2)^n u[n]$ 时的输出 $y[n]$，$n\geq 0$，并分别写出其中的零状态响应和零输入响应、稳态响应和暂态响应各分量。（12 分）

说明：　请看清每题和每小题的要求，并按要求做题，要求概画波形或还是图形的，必须标注明坐标尺度和特殊点的值。

中国科学院

2000年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题参考答案

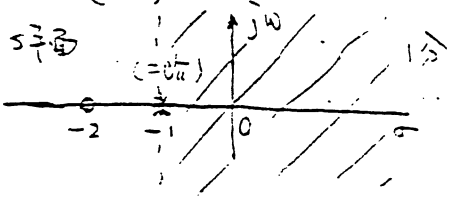
科目 信号与系统

一：解：图1(a)为连续时间因果LTI系统　图1(b)为离散时间因果LTI

1. 系统函数H(s)及收敛域和零极点图

$$H(s)=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)} \qquad H_2(s)=\frac{4}{s+2}$$ 0.5分

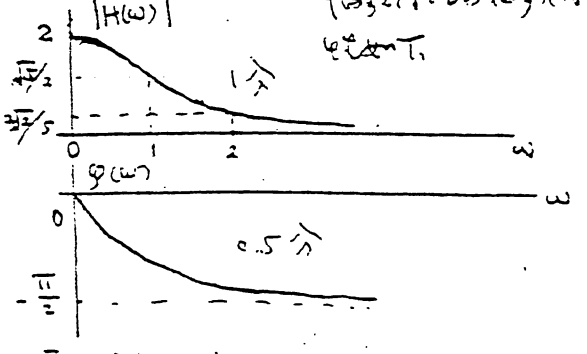
$$=\frac{s+2}{(s+1)^2}, \quad R_e\{s\}>-1$$ 2.5分



1分

2. 求频响 $H(\omega)$，画出幅频和相频特性图

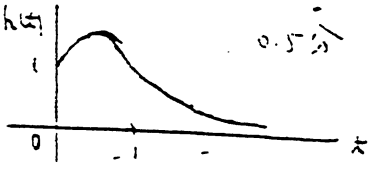
$$H(\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2}$$ 1分



3. 求单位脉冲响应 $h(t)$

$$H(s)=\frac{s+2}{(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2} \quad R_e\{s\}>-1$$ 1.5分

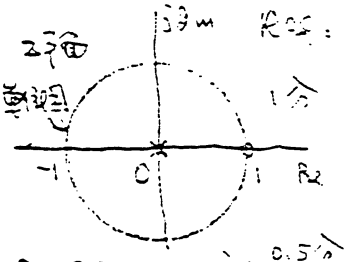
$$h(t)=e^{-t}u(t)+te^{-t}u(t)$$



1. H(z)及收敛域和零极点图

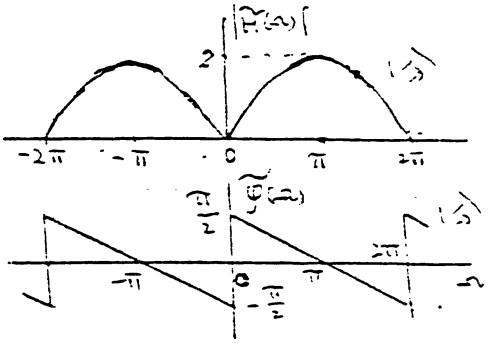
$$Y(z)=X(z)-2z^{-1}X(z)+z^{-2}X(z)=Y(z)z^{-1}$$

$$\therefore H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}}=1-z^{-1}$$ 2分



2. $h(n)=1-e^{-1}n$ 0.5分 $=2.5\sin\frac{\pi}{2}e^{-j(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}$

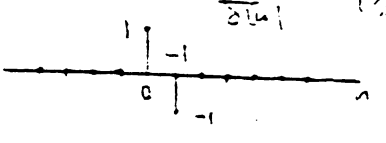
幅频特性和相频特性图



3. 单位脉冲响应 $h(n)$

$$h(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$$ 1分

波形图 1分

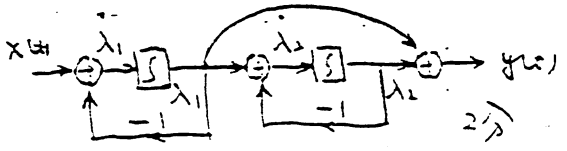


4. 微分方程描述

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+2\frac{d}{dt}y(t)+y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+x(t)$$ 1分

5 状态方程描述和对应A=[ ]的框图

直接(正准形)



2分

状态方程.

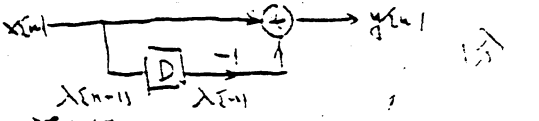
$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\lambda_1+x(t)\\ \dot{\lambda}_2=\lambda_1-\lambda_2\end{cases}$$ 2分

输出方程: $y(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)$ 1分

4. 差分方程描述

$$y[n]=x[n]-x[n-1]$$ 1分

5.



1分

状态方程

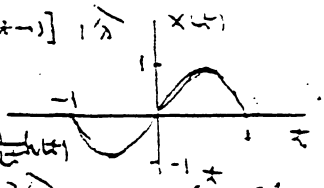
$$\lambda[n+1]=x[n]$$ 1分

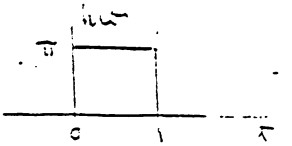
输出方程. $y[n]=-\lambda[n]+x[n]$ 1分

二. 试求下列各小题. (每小题8分, 共32分)

1. 解 $h(t)=\frac{d}{dt}s(t)=\pi[u(t)-u(t-1)]$ 1分

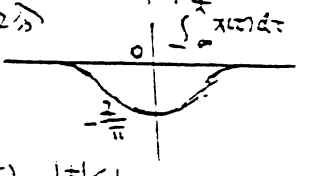
$x(t)$ 与 $h(t)$ 的波形如图

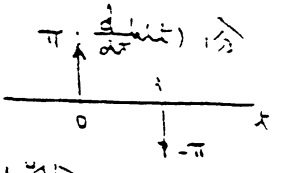




$$y(t)=x(t)*h(t)=\left[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\right]*\frac{d}{dt}h(t)$$

2分



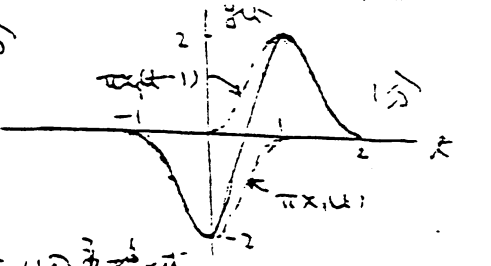


1分

$\frac{d}{dt}h(t)$ 是 $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ 的两个脉冲

$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ 的波形,

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=x_1(t)=\begin{cases}-\frac{1}{\pi}(1+\cos\pi t) & |t|\le 1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$$ 1分



1分

故 $y(t)=x_1(t)*\pi\delta(t)-\pi\delta(t-1)$

$=\pi x_1(t)-\pi x_1(t-1)$ 2分 画出波形如图

根据本题的特点, 首先将一个脉冲函数, 另一个取反, 然后

求出两个脉冲函数的积分, 得到两个阶跃函数, 最后将两个阶跃函数相减, 得到最终结果.

2. 由题: $H(\omega)=|H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}=\begin{cases}-1, & 0<\omega<\pi\\ 1, & -\pi<\omega<0\end{cases}$ $(-\pi,\pi)$ 内的频率响应

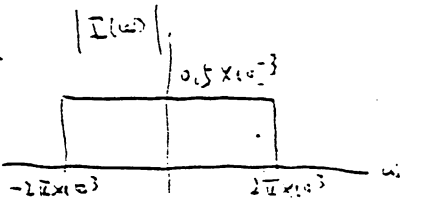
由于 $\frac{d}{d\omega}H(\omega)$ 是两个冲激函数之差, 即

$\frac{d}{d\omega}H(\omega)\xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}}nh[n]$. 1分

$$I(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(2\pi\times10^3 t)}{2\pi\times10^3 t}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\times10^3}\cdot\frac{\sin[2\pi\times10^3(t-0)]}{\pi(t-0)}\right\}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\times10^3}e^{-j\omega\times0} & |\omega| < 2\pi\times10^3 \\ 0 & |\omega| > 2\pi\times10^3 \end{cases}$$ 2分

$$|I(\omega)| = \begin{cases} 0.5\times10^{-3} & |\omega| < 2\pi\times10^3 \\ 0 & |\omega| > 2\pi\times10^3 \end{cases}$$ 1分



故 $E = \frac{10^3}{2\pi}\int_{-2\pi\times10^3}^{2\pi\times10^3}\left(\frac{1}{2\times10^3}\right)^2 d\omega = \frac{10^3}{2\pi}\left(\frac{1}{2\times10^3}\right)^2\times2\pi\times10^3 = 0.5$ 焦耳 1分

为保证信号不失真，对该信号进行采样时，采样间隔 T_{max} 为

$$T_{max} = \frac{\pi}{2\pi\times10^3} = 0.5\ ms$$ (奈奎斯特). 1分

三. 解：假设 N 点序列 $x[n]$ 和它的 N 点 DFT 分别为 $X(k)$，即

$$x[n],\ n=0,1,\cdots N-1 \xleftrightarrow{DFT} X(k),\ k=0,1,\cdots N-1$$

现已知 $X(k)$，$k=0,1,\cdots N-1$，要利用 N 点的 FFT 程序计算它的 IDFT 即计算 $x[n]$，$n=0,1,\cdots,N-1$，可采用下面两种方法：

方法1：先利用 FFT 程序计算出 $g[n]$，其中：

$$g[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad n=0,1,\cdots,N-1$$ 1分

则有 $x[n] = \frac{1}{N}g[N-n]$，即可得到 $X(k)$ 的 IDFT $x[n]$ 2分

证明：$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-n)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 2分

方法2：先利用 N 点 FFT 程序计算出 $X(k)$，$k=0,1,\cdots,N-1$ 的 $g[n]$，其中

$$g[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad n=0,1,\cdots,N-1$$ 1分

则有 $x[n] = \frac{1}{N}g^*[n]$，即可得到 $X(k)$ 的 IDFT $x[n]$ 2分

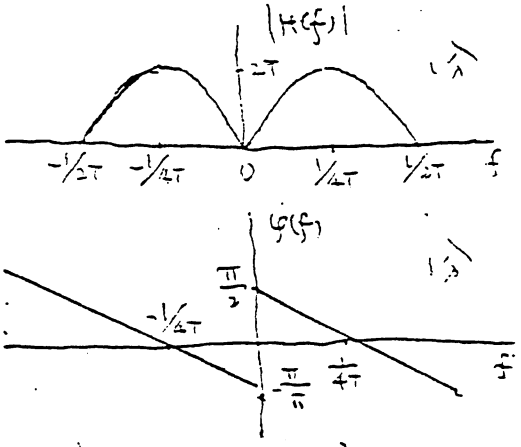
证明：$x[n] = \frac{1}{N}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right\}^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 2分

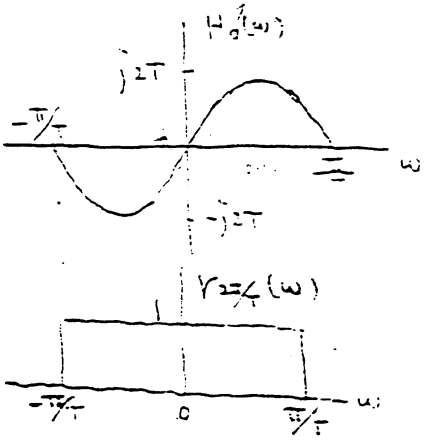
3. 풀이 : 1) 먼저 주어진 $h(t)$의 푸리에 변환 $H(f)$를 구한다.

$H(f) = [1 - H_1(f)]\,H_2(f)$ 여기서 $H_1(f) = \mathcal{F}\{\delta(t-2T)\} = e^{-j2\pi 2Tf}$

$H_2(f) = \begin{cases} (1 - e^{-j2\pi fT})\,T, & |f| < \frac{1}{2T} \\ 0, & |f| > \frac{1}{2T} \end{cases} = \begin{cases} j2T\sin(2\pi fT)\,e^{-j2\pi fT}, & |f| < 1/2T \\ 0, & |f| > 1/2T \end{cases}$ 2점

$H_2(f)$의 크기 $|H_2(f)|$와 위상 $\theta_2(f)$의 그래프는 다음과 같다.





또한 $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$

즉 $H_0(\omega) = \begin{cases} j2T\sin(T\omega), & |\omega| < \pi/T \\ 0, & |\omega| > \pi/T \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h_0(t)$

또한 $H(\omega) = H_0(\omega)\,e^{-j\omega T}$ 이므로 $h(t) = h_0(t-T)$

$h_0(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_0(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{j2T\sin(T\omega)\,\mathrm{rect}_{2\pi/T}(\omega)\}$

$= T\,\mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{rect}_{2\pi/T}(\omega)\,e^{jT\omega} - \mathrm{rect}_{2\pi/T}(\omega)\,e^{-jT\omega}\}$

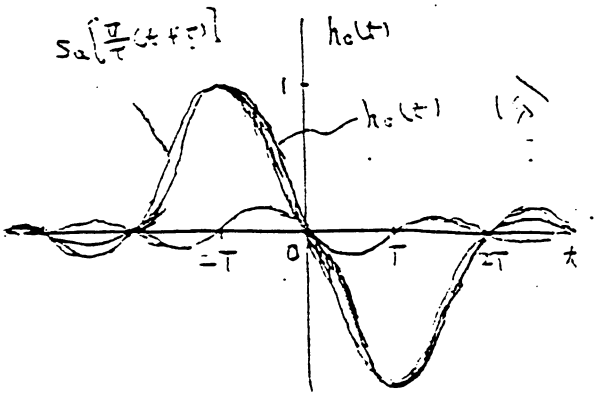
$= T\left\{\frac{1}{T}Sa\left[\frac{\pi}{T}(t+T)\right] - \frac{1}{T}Sa\left[\frac{\pi}{T}(t-T)\right]\right\}$

$= Sa\left[\frac{\pi}{T}(t+T)\right] - Sa\left[\frac{\pi}{T}(t-T)\right]$ 4점

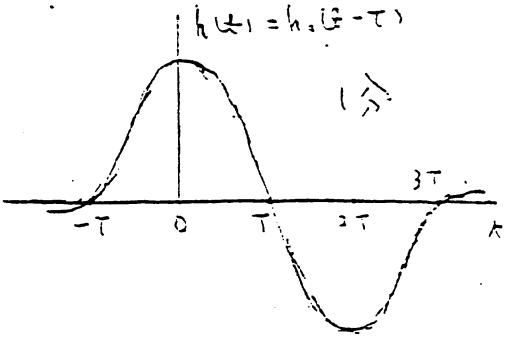
참고 예) $\mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{rect}_{2\pi/T}(\omega)\} = \frac{\pi}{T}Sa\left(\frac{\pi}{T}t\right)$ 임을 이용하면 시간 이동 성질($\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)e^{-j\omega T}\} = h(t-T)$)을 이용하여 $h_0(t)$를 $h(t) = h_0(t-T)$로 표현하는 것도 정답으로 인정함.

2. 풀이 $x(t) = p(t) + p(t-T) - p(t-2T) + p(t-3T)$ 라 하면

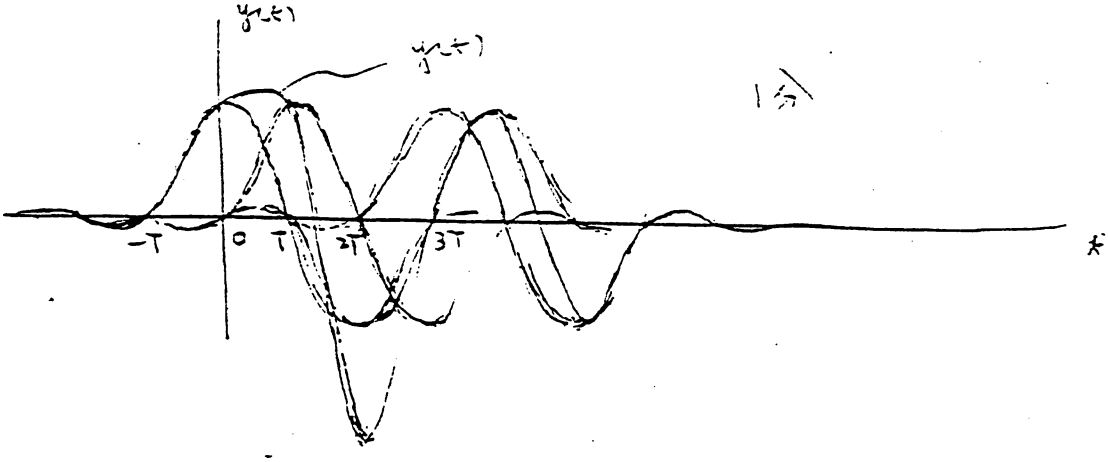
$y(t) = h(t) + h(t-T) - h(t-2T) + h(t-3T)$ 임을 이용하면 된다. 1점



1分



1分



1分

五 1. 按题意框图，此同是LTI系统之转移函数 $H(z)$ 为

$$H(z)=H_0\frac{1+z^{-2}}{(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$ 其中 H_0 为一常数. 1分

当 $x[n]=\cos[\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{3}]$ 时，即 $x[n]=\frac{1}{2}e^{j[\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{3}]}+\frac{1}{2}e^{-j(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{3})}$ 1分

$y[n]=H(e^{j\frac{\pi}{2}})\cdot\frac{1}{2}e^{j[\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{3}]}+H(e^{-j\frac{\pi}{2}})\cdot\frac{1}{2}e^{-j(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{3})}$

$\quad\quad\quad

$$\begin{cases} y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] = x[n-1] + 2x[n-2] \\ y[-1] = 3, \quad y[-2] = 1 \end{cases}$$

양변 z변환 $\xrightarrow{}$ $Y(z)$ 에 대한 식 정리 $\xrightarrow{}$ 역z변환 $y[n]$

$x[n] \xrightarrow{z\text{변환}} X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

$y[n]$ 의 z변환을 $Y(z)$ 라 하고, 시간지연 성질을 이용하여 z변환하면

$$Y(z) + \frac{1}{2}\left\{z^{-1}Y(z) + y[-1]\right\} - \frac{1}{2}\left\{z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]\right\} = X(z) + 2\left\{z^{-1}X(z) + x[-1]\right\}$$

$$Y(z)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right) = X(z)\left(1 + 2z^{-1}\right) + \frac{1}{2}y[-1] + y[-2] + x[-1]z^{-1} + 2x[-1]$$

$$Y(z) = \frac{1+2z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)} X(z) + \frac{\frac{1}{2}y[-1] + y[-2] + x[-1]z^{-1} + 2x[-1]}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{z^2+2z}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+1\right)} + \frac{\frac{1}{2}z^2 + 3z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+1\right)}$$

$$= \frac{z^2+2z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+1)^2} + \frac{\frac{1}{2}z^2 + 3z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+1)}$$

$$Y(z) = \frac{z^2+2z}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+1)^2} = \frac{4/3}{z-1} - \frac{5/4}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1/12}{(z+1)^2}$$

$$y[n] = \frac{4}{3}u[n] - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{12}(n+1)(-1)^n u[n]$$

$$Y(z) = \frac{3+\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)} = \frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$y[n] = (-1)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$y[n] = \frac{4}{3}(-1)^n + \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{12}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$n \geq 0$ 일 때 정상응답 $\frac{4}{3}(-1)^n$

$n \geq 0$ 일 때 과도응답 $\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{12}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

中国科学院——中国科学技术大学

2001 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试卷

试题名称：信号与系统

一、 本题包含五个小题，共 36 分。

1) 某离散时间序列 $x[n]$ 通过单位冲激响应 $h[n]=a^n u[n]$ 的离散时间 LTI 系统，输出为 $y[n]=\dfrac{u[n]-u[n-N]-a^{n+1}(u[n]-a^{-N}u[n-N])}{1-a}$，试求 $x[n]$，画出其序列图。(3 分)

2) 已知一个 4 点 DFT 系数依次为 0、0、4、0，试求它的 IDFT。(4 分)

3) 某连续时间 LTI 系统的频率响应 $H(\omega)$ 为

$$H(\omega)=\begin{cases}|\sin(\pi\omega/\omega_M)|e^{-j(\pi\omega/\omega_M)}, & |\omega|\le\omega_M\\ 0\ , & |\omega|>\omega_M\end{cases}$$

试求该系统的单位冲激响应 $h(t)$。(8 分)

4) $2N+1$ 点的 FIR 滤波器的单位冲激响应 $h[n]$ 为如下的二项式序列：

$$h[n]=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n}{2^{2N}}\dfrac{(2N)!}{(2N-n)!n!}, & 0\le n\le 2N\\ 0\ , & n<0, n>2N\end{cases}$$

试求该滤波器的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域、频率响应 $\tilde{H}(\Omega)$ (或 $H(e^{j\Omega})$)，并概画出 $N=2$ 时的滤波器幅频特性 $|\tilde{H}(\Omega)|$ (或 $|H(e^{j\Omega})|$) 和相频特性 $\tilde{\varphi}(\Omega)$。(8 分)

5) 某连续时间信号 $x(t)$ 的波形如图 1 所示，试求其拉普拉斯变换 $X(s)$，并概画出它的零、极点分布和收敛域。(6 分)

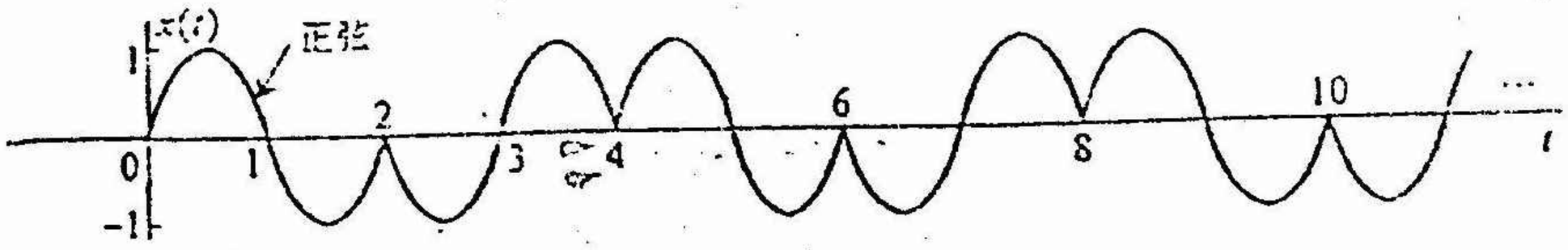


图 1

二、某离散时间因果 LTI 系统如图 2 所示，图中的系统 1 是一个频率响应为 $H_1(e^{j\Omega})$ 的 LTI 系统，且已知 $H_1(e^{j\Omega})=e^{-j\Omega}\cos^2(\Omega/2)$，试求：(本题共 20 分)

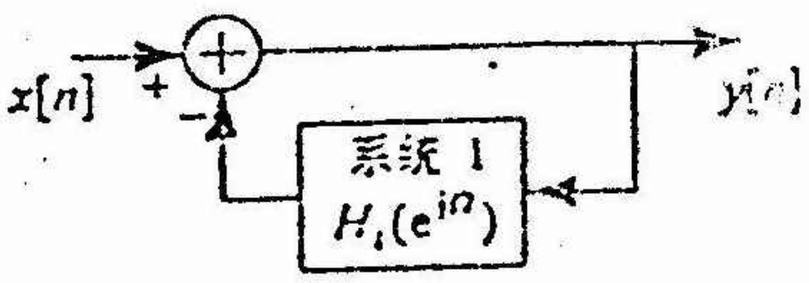


图 2

1) 系统 1 的单位冲激响应 $h_1[n]$，并概画出它的幅频特性和相频特性：(6 分)

2) 整个系统的系统函数 $H(z)$，并概画出它的单零、极点分布和收敛域：(4 分)

3) 系统 1 和整个系统分别是什么类型的滤波器(低通、高通、带通，和 FIR 或 IIR 等滤波器)？(4 分)

4) 对图 2 的整个系统，试画出用相加器、数乘器和单位延时构成的滤波器结构或信号流图，要求其中的数乘器为实数数乘器。(6 分)

三、 如下方程和非零起始条件表示的连续时间因果 LTI 系统，

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau+x(t)\\ y(0_-)=2\ ,\quad y'(0_-)=-3\end{cases}$$

试求当 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 时，系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和零输入响应 $y_{zi}(t)$，$t\geq 0$，以及系统的全响应 $y(t)$，$t\geq 0$。(12 分)

四、某连续时间 LTI 系统如图 3 所示，且已知：$h_1(t)=\dfrac{\sin\omega_M t}{\pi t}=\dfrac{\omega_M}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_M t)$；

$H_2(s)=s^{-1}$；

系统 3 为微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_M y(t)=-x(t)$$

表示的因果 LTI 系统；

$H_3(\omega)=e^{-j\omega T}$，$T=\dfrac{2\pi}{\omega_M}$；

$H_4(\omega)=j\omega$，$0<\alpha<1$。

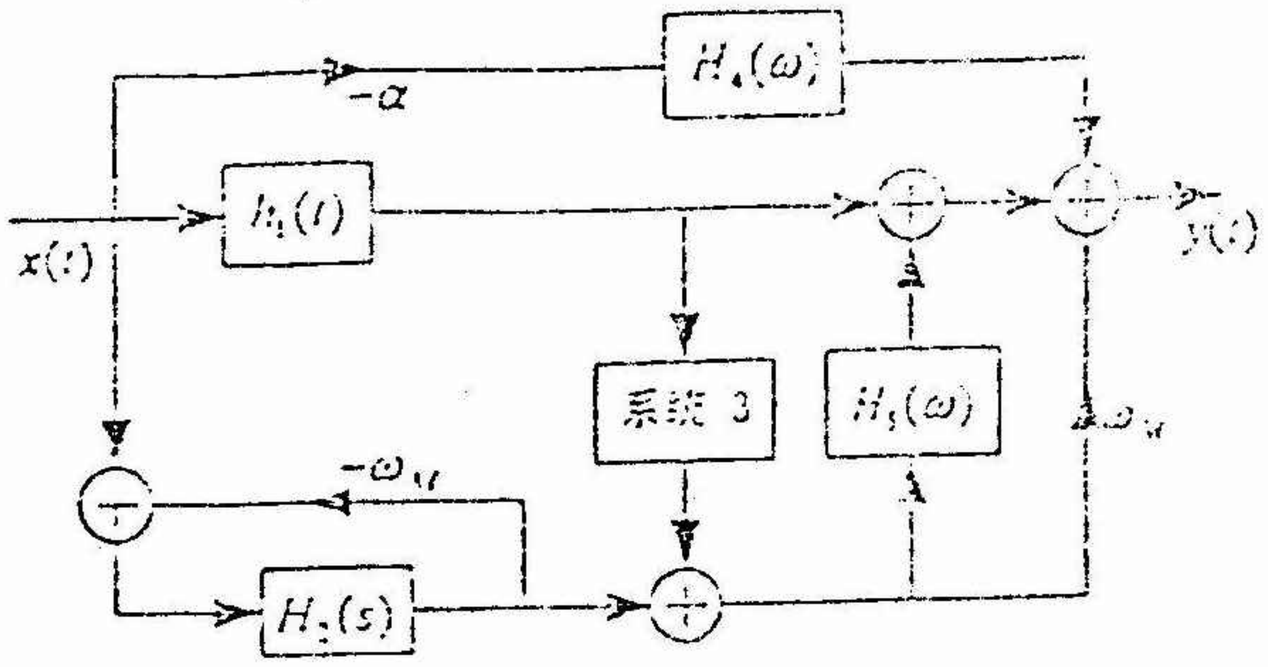


图 3

试求：(本题共 20 分)

1) 该系统的频率响应 $H(\omega)$，概画出其幅频特性 $|H(\omega)|$ 和相频特性 $\varphi(\omega)$，请注意在图 3 中，$0<\alpha<1$。并写出系统的输入和出信号变换关系。(10 分)

2) 若输入 $x(t)$ 是带限于 ω_M 的带限信号，现以不产生混叠的最大抽样间隔 T_{max}，对系统的输出信号 $y(t)$ 进行抽样，获得样本序列 $y[n]=y(nT_{max})$，试问 $y[n]$ 通过什么离散时间滤波器，能获得 $x(t)$ 以同样间隔抽样得到的样本序列 $x[n]=x(nT_{max})$？试求出这个离散时间滤波器的差分方程表示，并画出用三种离散时间基本单元构成的滤波器实现结构(10 分)

五、若你要用 N 点的 FFT 程序计算一个 $2N$ 点的实序列 $x[n]$，$n=0,\ 1,\ 2\cdots 2N-1$，的 DFT，一种可行的办法是把 $x[n]$ 构成一个 N 点的复序列 $y[n]$，即

$$y[n]=a[n]+jb[n],\quad n=0,\ 1,\ 2\cdots N-1$$

其中，$a[n]$ 是 $x[n]$ 的偶数点序列(即 $a[n]=x[2n]$，$n=0,\ 1,\ 2\cdots N-1$)，$b[n]$ 是 $x[n]$ 的奇数点序列(即 $b[n]=x[2n+1]$，$n=0,\ 1,\ 2\cdots N-1$)。试写出用 $y[n]$ 的 N 点 DFT 系数 $Y(k)$ 计算 $x[n]$ 的 $2N$ 点 DFT 系数 $X(k)$ 的表达式。(12 分)

说明：请看清题意和题中要求，特别是要求画图的必须概画出波形或函数图形，并注明座标尺度。

中国科学院半导体研究所

2002 年招收硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：信号与系统

注意：请将所有答案写在答卷纸上，并标明题号，写在考卷上的答案无效。

一、对下列每个时间函数确定其拉氏变换式和相应的收敛域（本题共 20 分，每小题为 5 分）。

（1） $e^{-at}u(t)$　　（$a<0$）

（2） $\cos(\omega_0 t+\phi)u(t)$

（3） $te^{-at}u(t)$　　（$a>0$）

（4） $\delta(at-b)$　　（a,b 为实常数）

二、分析计算题

（1）求连续时间信号 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$，（本题 8 分）

$$x(t)=\begin{cases}(1-|t|)e^{-j(\pi/2)}\left[\sin 5\pi t+j\cos 5\pi t\right], & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

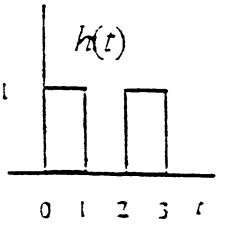
（2）试画出如下差分方程系统频率响应函数的幅频特性，（本题 7 分）

$$y(k+1)+0.5y(k)=f(k)$$

三、$X(z)=\dfrac{1}{z-1-z^{-N+1}+Z^{-N}}$，$|Z|>1$；试求反 Z 变换 $x[n]$；（本题 10 分）

四、已知某连续时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)$ 见下图，试用两种方法：1）时域卷积方法；2）付里叶变换方法，求当输入为周期信号 $x(t)=0.5[1+\cos(\pi t/2)]$ 时，系统的输出 $y(t)$。

（本题共 15 分，其中，卷积方法 7 分，变换方法 8 分）



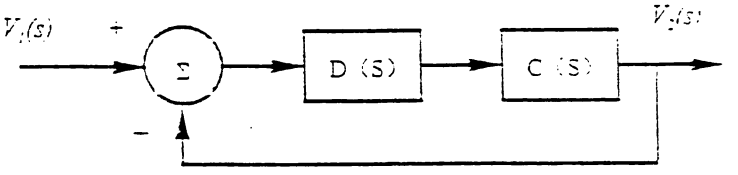
五、已知某连续时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)=\int_{1}^{t} e^{-(t-1)}d\tau$，试求其系统函数 $H(s)$，并概画出像函数的收敛域和零、极点图，以及系统的幅频响应 $|H(\omega)|$。　（本题 20 分）

六、已知一反馈系统如图所示，其中 $D(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s-2)}$，$C(s)=k(s+a)$，

1）求系统传输函数 $H(S)$；　（本小题 6 分）

2）分析 $0<a<1$ 和 $a>1$ 两种情况的系统稳定性；　（本小题 6 分）

3）针对 $a=2$，试选择 k 的值，使闭环系统有一对复数极点且具有 $\frac{1}{2}$ 的阻尼系数。（本小题 3 分）



试题名称：信号与系统

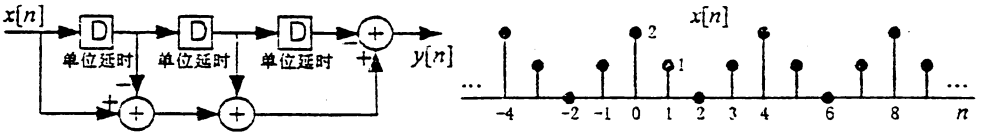
说明：1. 本试卷共四大题，总分150分。
2. 请看清题意，特别是题目中的黑体字；题目中要求概画的图形包含得分，必须作图，并加必要的标注；若题目中明确写明用那种求解方法的，必须用指明的方法求解，若题目中没有限定求解方法的，可用任何正确的方法求解。

一、试求下列5个小题：（每小题15分，共75分）

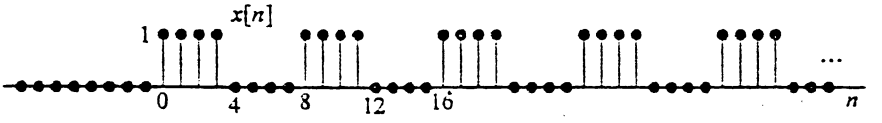
1. 已知差分方程 $y[n]-0.5y[n-1]-0.5y[n-2]=x[n]-x[n-3]$ 和非零起始条件 $y[-1]=2$，$y[-2]=-2$ 表示的起始不松弛的离散时间因果系统，试用递推算法分别计算出在 $\delta[n]$ 输入时，系统的输出 $y[n]$ 中的零输入响应 $y_{zi}[n]$，$n\geq 0$，和零状态响应 $y_{zs}[n]$。（至少需分别递推计算出 $y_{zi}[n]$ 和 $y_{zs}[n]$ 的头4个序列值）。

2. 已知连续时间LTI系统的单位冲激响应 $h(t)=\begin{cases}|\sin(\pi t/T)|, & |t|\leq T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$，概画出它的波形，求出系统频率响应 $H(\omega)$，概画出它的幅频响应 $|H(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi(\omega)$。

3. 某数字滤波器的方框图如下图左图所示，试求它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，写出系统零、极点，并回答它是IIR、还是FIR滤波器？进一步，求出它对下图右图所示的周期输入信号 $x[n]$ 的响应或输出 $y[n]$。



4. 试求下图所示序列 $x[n]$ 的Z变换 $X(z)$，并概画出 $X(z)$ 的零、极点分布和收敛域。



5. 可以运用一个 N 点FFT程序同时计算两个 N 点的不同实序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的DFT $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$，试简述这一计算方法和计算框图，并推导相应的运算公式。

二、某个稳定的连续时间LTI系统的系统函数为 $H(s)=\dfrac{3s-0.5}{(s^2+0.5s-1.5)e^{2s}}$，（共20分）

1. 试确定其收敛域和零、极点分布，并求出该系统的单位冲激响应 $h(t)$；（10分）
2. 该系统因果（或能实现）吗？若不能实现，请设计一个与它的幅度频率特性完全相同的连续时间因果稳定滤波器，画出其用连续时间相加器、数乘器和积分器的并联实现结构的方框图或信号流图，并写出其微分方程表示。（10分）

三、试求下列两小题(共 20 分):

1. 某连续时间系统的输入输出信号变换关系为 $y(t)=\int_0^1 x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$，试确定该系统是否线性？是否时不变？是否因果？是否稳定？若是线性时不变系统，试求出它的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出 $h(t)$ 的波形。(9 分)

2. 现已知该系统的输入为 $x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_0(t-2n)$，其中 $x_0(t)=\begin{cases}\sin\pi t, & 0\le t\le 1\\ 0, & t<0, t>1\end{cases}$，试用时域卷积的方法求出系统的输出 $y(t)$。并概画出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形。(11 分)

四、两个连续时间实能量受限信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，已知 $x_1(t)$ 的最高频率分量为 2000 Hz，$x_2(t)$ 的最高频率分量为 1000 Hz。对于如下 $y_i(t)$，$i=1,2,3,4$，试求：(共 35 分)

a) $y_1(t)=x_1(t)x_2(t)$　　b) $y_2(t)=x_1(t)+x_2(t)\cos(6000\pi t)$

c) $y_3(t)=R_{x_1x_2}(t)$，即 $y_3(t)$ 是 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的互相关函数

d) $y_4(t)=[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)+x_2(t)\sin(8000\pi t)$，其中 $h(t)=\begin{cases}4000, & |t|<0.125\text{ms}\\ 0, & |t|>0.125\text{ms}\end{cases}$

1. 若 $y_i(t)$，$i=1,2,3,4$，分别用周期冲激串抽样，试确定为确保它们不产生混叠(即临界抽样)，各自的最大抽样间隔 $T_{i\max}$，$i=1,2,3,4$，是多少 ms。(18 分)

2. 若对 $y_i(t)$，$i=1,2,3$，分别用上述各自求得的 $T_{i\max}$ 进行周期冲激串抽样，得到各自的已抽样信号 $y_{1P}(t)$、$y_{2P}(t)$ 和 $y_{3P}(t)$。试问：你能从 $y_{iP}(t)$，$i=1,2,3$ 中，分别同时无失真地恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 吗？对于能无失真恢复的 $y_{iP}(t)$，试画出由它们分别恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的无失真变种的系统框图。(9 分)

3. 若对 $y_4(t)$ 用 1. 小题确定的 $T_{4\max}$ 进行周期冲激串抽样，得到的已抽样信号 $y_{4P}(t)$ 会出现什么情况？试从时域(即 $y_{4P}(t)$ 的波形或表达式)，或者从频域(即 $y_{4P}(t)$ 的频谱 $Y_{4P}(\omega)$)，说明其原因。为避免出现这样的问题(即为了在对 $y_4(t)$ 抽样的同时，必须在其已抽样信号中同时无失真地保存 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的信息)。请说明你可用什么方法来避免这一问题。(8 分)

中国科学院 & 中国科学技术大学

2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

试题名称： 信号与系统

一、本题包括 5 个小题：（每小题 15 分，共 75 分）

1. 先求零输入响应 $y_{zi}[n]$，$n\geq 0$，它是在当前输入 $x[n]=0$ 时，仅有非零起始条件造成的那部分输出，它应满足齐次方程 $y_{zi}[n]-0.5y_{zi}[n-1]-0.5y_{zi}[n-2]=0$，它的后推方程为

$$y_{zi}[n]=0.5(y_{zi}[n-1]+y_{zi}[n-2]) \qquad (1.1\text{-}1)$$ （到此得 3 分）

由于系统是因果系统，仅有当前输入 $x[n]=\delta[n]$ 造成的零状态响应 $y_{zs}[n]=0$，$n<0$，故 $y_{zi}[-1]=y[-1]=2$，$y_{zi}[-2]=y[-2]=-2$．用它们并按照后推方程(1.1-1)，可以逐个递推出 $y_{zi}[n]$，$n\geq 0$，按此计算出 $y_{zi}[n]$ 的头 4 个序列值如下：（这一段得 1 分）

$y_{zi}[0]=0.5(y_{zi}[-1]+y_{zi}[-2])=0.5(2-2)=0$ （该值和以下 3 个序列值每个得 1 分）

$y_{zi}[1]=0.5(y_{zi}[0]+y_{zi}[-1])=0.5(0+2)=1$

$y_{zi}[2]=0.5(y_{zi}[1]+y_{zi}[0])=0.5(1+0)=0.5$

$y_{zi}[3]=0.5(y_{zi}[2]+y_{zi}[1])=0.5(0.5+1)=0.75$，依此类推，计算出 $y_{zi}[4]$、$y_{zi}[5]$ …

再求当前输入 $x[n]=\delta[n]$ 造成的零状态响应 $y_{zs}[n]$，它就是原差分方程表示的因果 LTI 系统的单位冲激响应，且 $y_{zs}[n]=0$，$n<0$，只要用如下后推方程，逐个递推出 $y_{zs}[n]$，$n\geq 0$．

$$y_{zs}[n]=\delta[n]-\delta[n-2]+0.5(y_{zs}[n-1]+y_{zs}[n-2]) \qquad (1.1\text{-}2)$$ （这一段得 3 分）

由此递推出 $y_{zs}[n]$ 的头 4 个序列值如下：（以下 4 个序列值每个得 1 分）

$y_{zs}[0]=\delta[0]-\delta[-2]+0.5(y_{zs}[-1]+y_{zs}[-2])=1-0+0.5(0+0)=1$

$y_{zs}[1]=\delta[1]-\delta[-1]+0.5(y_{zs}[0]+y_{zs}[-1])=0-0+0.5(1+0)=0.5$

$y_{zs}[2]=\delta[2]-\delta[0]+0.5(y_{zs}[1]+y_{zs}[0])=0-1+0.5(0.5+1)=-0.25$

$y_{zs}[3]=\delta[3]-\delta[1]+0.5(y_{zs}[2]+y_{zs}[1])=0-0+0.5(-0.25+0.5)=0.125$

依此类推，计算出 $y_{zs}[4]$、$y_{zs}[5]$ …

2. $h(t)=\begin{cases}|\sin(\pi t/T)|, & |t|\leq T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$ 的波形如图 1.1-1 所示，（画对 $h(t)$ 的波形得 2 分）

系统的频率响应 $H(\omega)$（即 $h(t)$ 的傅里叶变换）可以用多种方法求，这里举出两种方法的求解：

方法 1：对图 1.2-1 所示的 $h(t)$ 波形求它的一次微分 $h'(t)$ 和二次微分 $h''(t)$，得到 $h'(t)$ 和 $h''(t)$ 的波形分别如图 1.2-2 和图 1.2-3 所示．（画对 $h'(t)$ 和 $h''(t)$ 的波形共得 4 分）

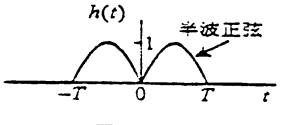


图1.2-1

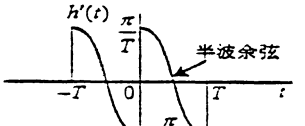


图1.2-2

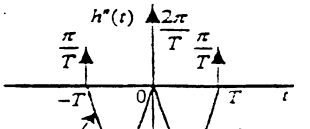


图1.2-3

由图 1.1-3 可以写出 $h''(t)$ 的表达式如下：

$$h''(t)=(\pi/T)[\delta(t+T)+2\delta(t)+\delta(t-T)]-(\pi^2/T^2)h(t) \qquad (1.2\text{-}1)$$ （得 2 分）

对上式等号两边取傅里叶变换，并利用傅里叶变换的微分性质，则有

$$(j\omega)^2 H(\omega) = (\pi/T)[e^{j\omega T} + 2 + e^{-j\omega T}] - (\pi^2/T^2)H(\omega) \qquad (1.2\text{-}2) \qquad (得3分)$$

由上式，进一步可得到

$$H(\omega) = \frac{(\pi/T)[e^{j\omega T} + 2 + e^{-j\omega T}]}{(\pi/T)^2 - \omega^2} = \frac{(\pi/T)(e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}})^2}{(\pi/T)^2 - \omega^2} = \frac{(\pi/T)\cos^2(\omega T/2)}{(\pi/T)^2 - \omega^2}$$

$$= \frac{(\pi/T)[1 + \cos(\omega T)]}{(\pi/T)^2 - \omega^2} \qquad (1.2\text{-}3) \qquad (得2分)$$

方法 2: $h(t)$ 可以写成如下表达式:

$$h(t) = \sin\left[\frac{\pi}{T}(t+T)\right] + 2\sin\left[\frac{\pi}{T}t\right] + \sin\left[\frac{\pi}{T}(t-T)\right] \qquad (1.2\text{-}4)\text{(写出本式得2分)}$$

由于 $\sin(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$，$\mathrm{Re}\{s\} > 0$， （写出本式得3分）

利用拉氏变换的时移性质，(1.1-4)式表示的 $h(t)$ 的拉氏变换像函数 $H(s)$ 如下，且 $h(t)$ 是有限持续期的时间函数，$H(s)$ 的收敛域至少是有限 S 平面，即有

$$H(s) = \frac{(\pi/T)(e^{sT} + 2 + e^{-sT})}{s^2 + (\pi/T)^2}, \quad s \in \text{有限 S 平面} \qquad (1.2\text{-}5) \qquad (得3分)$$

$H(s)$ 的收敛域包含虚轴，故 $h(t)$ 的傅里叶变换 $H(\omega)$ 为

$$H(\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{(\pi/T)(e^{j\omega T} + 2 + e^{-j\omega})}{(j\omega)^2 + (\pi/T)^2} = \frac{(\pi/T)\cos^2(\omega T/2)}{(\pi/T)^2 - \omega^2}$$

$$= \frac{(\pi/T)[1 + \cos(\omega T)]}{(\pi/T)^2 - \omega^2} \qquad (1.2\text{-}6) \qquad (得3分)$$

上式的结果与(1.2-3)式的结果相同.

说明：还可以用其他方法求 $H(\omega)$，如果用傅里叶正变换公式，通过积分运算，或者利用傅里叶变换其他性质，只要正确求得与(1.2-3)式同样结果，都可得到 10 分

进一步，由(1.2-3)式可以概画出系统的幅频响应 $|H(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi(\omega)$ 如下:

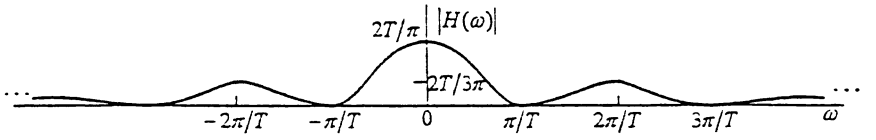


图1. 2-4

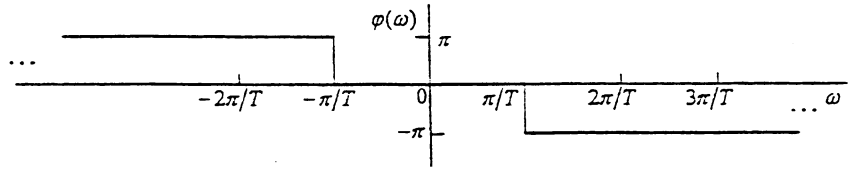


图1. 2-5

（画对 $|H(\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 得2分）

3. 由于离散时间单位延时的系统函数为 z^{-1}，因此，本小题滤波器的系统函数为

$$H(z)=1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}=(1-z^{-1})(1+z^{-2}),\quad |z|>0 \qquad (1.3\text{-}1)$$

(以上求对得 4 分)

本系统有三个零点，即 $z_{1,2}=\pm j$ 或 $z_{1,2}=e^{\pm j\pi/2}$，只有一个三阶极点，即 $p=0$。零、极点分布见图 1.3-1。 (零、极点写对或画对得 2 分)

该滤波器是 FIR 滤波器 (回答正确得 1 分)

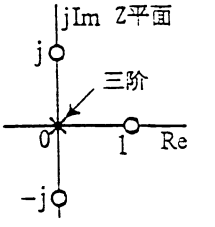


图 1.3-1

可以用变换域方法、或者时域方法求解在题图所示 $x[n]$ 输入时的滤波器输出 $y[n]$。

变换域方法： $x[n]$ 是周期 $N=4$ 的周期序列，它可以如下展开成离散傅里叶级数

$$\tilde{x}[n]=1+\cos(\pi n/2)=1+e^{j\pi n/2}+e^{-j\pi n/2}$$

由于离散时间 LTI 系统对复指数序列 $e^{j\Omega_0 n}$ 输入的响应为 $\tilde{H}(\Omega_0)e^{j\Omega_0 n}$ 或 $H(e^{j\Omega_0})e^{j\Omega_0 n}$，其中 $\tilde{H}(\Omega_0)=H(e^{j\Omega_0})$ 是系统的频率响应，即 Z 平面单位圆上的系统函数， (得 2 分)

由(1.3-1)式表示的系统函数及其零、极点可知 $H(e^{j0})=H(e^{\pm j\pi/2})=0$， (得 2 分)

因此，滤波器在 $\tilde{x}[n]$ 输入时的输出 $y[n]$ 为

$$y[n]=1\times H(e^{j0})+0.5\times H(e^{j\pi/2})+0.5\times H(e^{-j\pi/2})=0 \qquad (\text{得 4 分})$$

时域方法： 由题图所示的数字滤波器结构或(1.3-1)式表示的系统函数，可以求得滤波器的单位冲激响应 $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]+\delta[n-2]-\delta[n-3]$ (1.3-2) (得 2 分)

该滤波器在 $\tilde{x}[n]$ 输入时的输出为 $y[n]=\tilde{x}[n]*h[n]$，它是一个与 $\tilde{x}[n]$ 相同周期的周期序列，可以用列表计算 $y[n]=\tilde{x}[n]*h[n]$，计算表如下：

[illegible]		0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	
[illegible]		0	−1	−2	−1	0	−1	−2	−1	0	−1	−2	−1	
[illegible]		0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	
[illegible]		0	−1	−2	−1	0	−1	−2	−1	0	−1	−2	−1	

上表白色表格中每个反对角线行的数值相加就是 $y[n]$ 的响应序列值，由上表三步可以得到 $y[n]$ 的连续 9 个序列值都是零值，而 $y[n]$ 也是周期为 4 的周期序列，故所求的 $y[n]=0$，$-\infty<n<\infty$。这一结果与变换域方法求得的结果相同。 (得 6 分)

另外，还可以用其他的时域卷积方法，

例如，先得到(1.3-2)式，即 $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]+\delta[n-2]-\delta[n-3]$ (得 2 分)

再由题图所示的 $\tilde{x}[n]$ 波形，可写出 $\tilde{x}[n]$ 的表达式为

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(2\delta[n-4k]+\delta[n-4k-1]+\delta[n-4k-3]) \qquad (1.3\text{-}3)$$ (得 2 分)

计算 $\tilde{x}[n]$ 与 $h[n]$ 的卷积，得到 $y[n]=\tilde{x}[n]*h[n]=0$ (得 4 分)

或者，利用卷积和运算的图解法，正确画出必要的有关图形，

也可以求得 $y[n]=\tilde{x}[n]*h[n]=0$ (得 8 分)

4. $x[n]$可以写成为 $x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u[n-4k]$ （得 3 分）

因为 $u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}$，$|z|>1$， （得 2 分）

利用 Z 变换的线性性质和时移性质，$x[n]$的 Z 变换为

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{-4k}}{1-z^{-1}}=\frac{1}{1-z^{-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-z^{-4})^k$$

$$=\frac{1}{(1-z^{-1})(1+z^{-4})},\ |z|>1 \qquad (1.4\text{-}1) \quad \text{（得 5 分）}$$

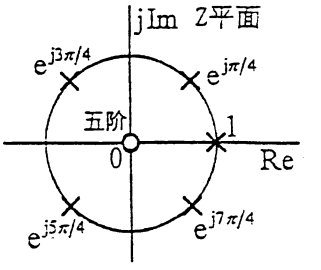


图 1.4-1

$X(z)$有 4 个一阶复极点 $p_i=e^{j\frac{(2i-1)}{4}\pi}$，$i=1,2,3.4$，一个一阶实极点 $p_5=1$；只有一个 5 阶零点 $z=0$。$X(z)$在 Z 平面上的零、极点分布如图 1.4-1 所示。 （写对或画对零、极点得 5 分）

5. 由于 N 点的 FFT 程序可以计算一个 N 点复序列 $x[n]$的 DFT 系数 $X(k)$，因此，用一个 N 点FFT 程序同时计算两个 N 点实序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$的 DFT 的方法如下：首先令：

$x_1[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1(k)$和$x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)$，及$x[n] \xleftrightarrow{DFT} X(k)$

，把两个 N 点实序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$分别作为实部和虚部，构成一个 N 点复序列 $x[n]$，即

$$x[n]=x_1[n]+jx_2[n] \qquad (1.5\text{-}1) \quad \text{（得 1 分）}$$

根据 DFT 的线性性质，则有

$$x[n]=x_1[n]+jx_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X(k)=\mathrm{DFT}\{x_1[n]\}+j\times\mathrm{DFT}\{x_2[n]\}$$

$$=X_1(k)+jX_2(k) \qquad (1.5\text{-}2) \quad \text{（得 2 分）}$$

又上式右边可以看出：$X_1(k)$是$X(k)$的实部序列，$X_2(k)$是$X(k)$的实部序列，并根据 DFT 的有关对称性质，可以得到

$$X_1(k)=\mathrm{Re}\{X(k)\}=0.5\{X(k)+X^*(N-k)\} \quad k=0,1,2\cdots N-1 \quad (1.5\text{-}3) \quad \text{（得 4 分）}$$

和 $X_2(k)=\mathrm{Im}\{X(k)\}=-0.5j\{X(k)-X^*(N-k)\}$ $k=0,1,2\cdots N-1$ (1.5-4) （得 4 分）

上面两式中的上标*表示取共轭运算(下同)。

用一个 N 点 FFT 程序同时计算两个 N 点实序列 $x_1[n]$、$x_2[n]$的 DFT $X_1(k)$、$X_2(k)$的计算框图如图 1.5-1 所示。 （画对得 4 分）

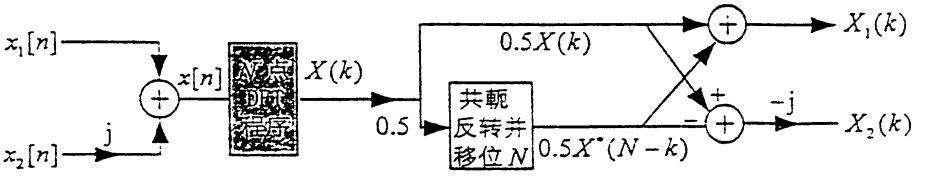


图 1.5-1

二、本题共 20 分

1. 该稳定 LTI 系统的系统函数为 $H(s)=\dfrac{3s-0.5}{(s-1)(s+1.5)}e^{-2s}$，

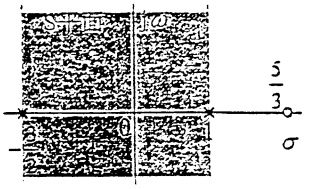


图 2.1-1

它的零、极点如图 2.1-1 所示，由于系统稳定，系统函数的收敛域必须包含虚轴，故 $H(s)$ 的收敛域 R_h 为图 2.1-1 中灰色区域，即 $-1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1$。 (到此得 3 分)

系统的单位冲激响应 $h(t)$ 是 $\{H(s),\ R_h\}$ 的反拉氏变换可以写成

$H(s)=H_0(s)e^{-2s}$，$-1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1$ 其中，e^{-2s} 的反拉氏变换是 $\delta(t-2)$， (得 1 分)

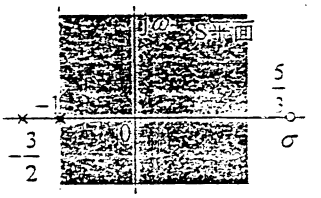


图 2.1-2

$H_0(s)=\dfrac{3s-0.5}{(s-1)(s+1.5)}$，$-1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1$ 的反拉氏变换 $h_0(t)$ 可以用部分分式展开法求，

$$H_0(s)=\left\{\frac{3s-0.5}{(s-1)(s+1.5)},\ -1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1\right\}$$
$$=\left\{\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s-1.5},\ -1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1\right\}$$
$$=\left\{\frac{1}{s-1},\ \mathrm{Re}\{s\}<1\right\}+\left\{\frac{2}{s+1.5},\ 1.5<\mathrm{Re}\{s\}\right\}$$ (得 3 分)

利用拉氏变换对：$e^{-at}u(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}\dfrac{1}{s+a}$，$\mathrm{Re}\{s\}>-a$

和 $-e^{-at}u(-t)\overset{L}{\longleftrightarrow}\dfrac{1}{s+a}$，$\mathrm{Re}\{s\}<-a$

可以求得 $h_0(t)=2e^{-1.5t}u(t)-e^{t}u(-t)$ (得 2 分)

再利用拉氏变换的时域卷积性质，求得

$$h(t)=h_0(t)*\delta(t-2)=2e^{-1.5(t-2)}u(t-2)-e^{t-2}u(-t+2) \quad (2.1\text{-}1)$$ (得 1 分)

2. 由(2.1-1)式可知，$h(t)\neq 0$，$t<0$，故这个连续时间 LTI 系统非因果，也就不可能用三种连续时间基本单元(相加器、数乘器和积分器)来实现。 (得 1 分)

只要把图 2.1-1 中的 $s=1$ 的一阶极点移到 $s=-1$，收敛域改成 $\mathrm{Re}\{s\}>1$，如图 2.1-2 所示，就设计出与原系统幅频特性完全相同、且既因果又稳定，这个因果稳定滤波器的系统函数为

$$H_1(s)=\frac{3s-0.5}{(s+1)(s+1.5)},\ \mathrm{Re}\{s\}>1 \quad (2.1\text{-}2)$$ (得 3 分)

为了要把 $H_1(s)$ 用并联结构实现，需将上式的 $H_1(s)$ 部分分式展开成

$$H_1(s)=\frac{10}{s+1.5}-\frac{7}{s+1} \quad (2.1\text{-}3)$$ (得 2 分)

按照上式，本小题所要求的滤波器用连续时间数乘器、相加器和经济区组成的并联结构实现的，方框图或信号流图分别如图 2.2-1 或图 2.2-2 所示， (只要画对其中一个得 4 分)

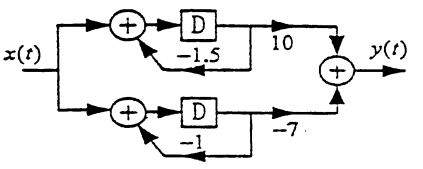


图 2.2-1 方框图

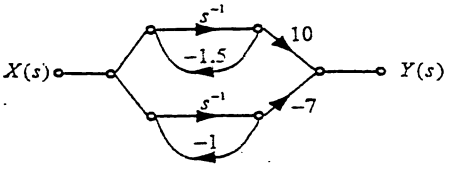


图 2.2-2 信号流图

三、本题共 20 分:

1. 系统输入输出关系可写为

$$y(t)=\int_0^t x(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}[u(\tau)-u(\tau-1)]x(t-\tau)\mathrm{d}\tau=x(t)*[u(t)-u(t-1)]$$ (得 3 分)

因此，它是一个 LTI 系统，即既满足线性，又满足时不变性， (得 2 分)。

且这个 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)=u(t)-u(t-1)$， (得 1 分)

其波形如图 3.1-1 所示， (波形画对得 1 分)

由于 $h(t)=0$，$t<0$，故它是因果的 LTI 系统。 (得 1 分)

由图 3.1-1 可知，$h(t)$ 绝对可积，故它是稳定的 LTI 系统。 (得 1 分)

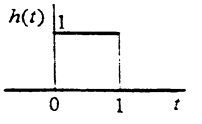


图 3.1-1

2. 已知系统的输入 $x(t)$ 为

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_0(t-2n)，\text{其中 } x_0(t)=\begin{cases}\sin\pi t, & 0\le t\le 1\\ 0, & t<0, t>1\end{cases}$$

它的波形如图 3.2-1 所示。(波形画对得 2 分) $x(t)$ 通过该系统的输出为

$$y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*[u(t)-u(t-1)]=x(t)*u(t)-x(t)*u(t-1)\quad (3.2\text{-}1)$$ (得 2 分)

令： $y_0(t)=x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau$

(上式得 1 分)

它的波形如图 3.2-2 所示

(波形画对得 1 分)

且有，

$x(t)*u(t-1)=y_0(t-1)$

(上式得 1 分)

因此，系统输出 $y(t)$ 可表示为

$y(t)=y_0(t)-y_0(t-1)$

$y(t)$ 的波形如图 3.2-3 所示

(波形画对得 2 分)

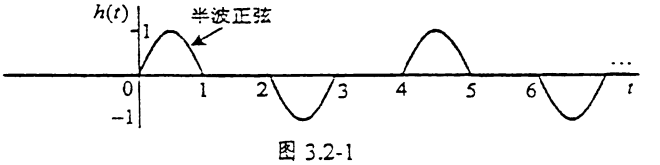


图 3.2-1

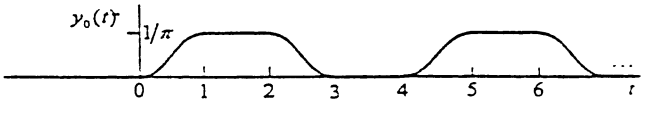


图 3.2-2

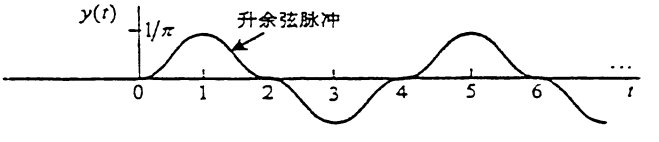


图 3.2-3

$y(t)$ 可写成 $y(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(1-\cos\pi t)[u(t-2k)-u(t-2k-2)]$ (得 2 分)

中国科学院－中国科学技术大学

2004年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：　　信号与系统

说明：1. **本试卷共五大题，总共150分。**

2. **请看清每题的要求，特别注意黑体字，若要求画图的，必须概画出图形，并作必要的标注。**

一、试求下列两小题：**(共25分)**

1. 已知单位**阶跃**响应为 $s(t)=tu(t)-2(t-T)u(t-T)+(t-2T)u(t-2T)$ 的连续时间LTI系统，试求并**概画出**输入为 $x(t)=(\pi/T)\sin(2\pi t/T)u(t)$ 的输出 $y(t)$。**(15分)**

2. 用**递推算法**求如下差分方程表示的离散时间因果LTI系统的单位冲激响应 $h[n]$，**至少计算前4个序列值。(10分)**

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]-\frac{1}{2}y[n-1]=\sum_{k=0}^{\infty}x[n-k]$$

二、试求下列各小题：**(每小题15分，共45分)**

1. 已知单位冲激响应为 $h(t)=\dfrac{\sin[\omega_0(t-1)]\sin[2\omega_0(t-1)]}{\pi^2(t-1)^2}$ 的连续时间 LTI 系统，试求它的频率响应 $H(\omega)$，**并概画出**幅频响应 $|H(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi(\omega)$。

2. 已知**单位阶跃响应**的拉氏变换为 $S(s)=\dfrac{2}{(s^2+2s+10)(e^{4s}-1)}$，$\mathrm{Re}\{s\}>0$ 的连续时间LTI系统，试求其**单位冲激响应** $h(t)$。

3. 一个长度为 M 点的**数字信号** $x[n]$ **分别通过**两个均为 L 点的FIR **数字滤波器**（它们的单位冲激响应分别为 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$）的输出分别是 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$，现有一个 N 点FFT程序（$N\geq M+L-1$）。试画出**仅用这个** N **点FFT程序**，高效快速地同时分别计算出 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 的**算法框图**，并加以**必要的说明。(提示：**数字信号 $x[n]$，以及 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 都属于**实序列)**

三、已知单位冲激响应为 $h(t)=\dfrac{1}{2T}\left\{\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)+2\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\pi t}{T}-\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\pi t}{T}-\pi\right)\right\}$ 的连续时间LTI系统，其中的函数 $\mathrm{Sa}(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，试求：**(共25分)**

1. 该系统的频率响应 $H(\omega)$，**并概画出它的幅频响应** $|H(\omega)|$ **和相频响应** $\varphi(\omega)$，它是什么类型(低通、高通、带通、全通、线性相位等)滤波器？**(15分)**

2. 当系统的输入为 $x(t)=\dfrac{\sin(\pi t/2T)}{\pi t}\sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\cos\left[k\left(\dfrac{\pi}{2T}t+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$ 时，试求统的输出 $y(t)$。**(10分)**

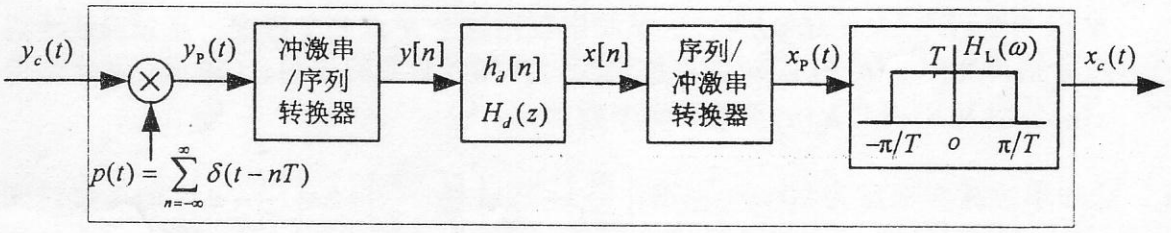
四、某数字滤波器在 Z 平面上只有一个$2N$阶极点$z=0$和一个$2N$阶零点$z=-1$，并已知该滤波器对常数序列输入具有单位增益。试求：(共 35 分)

1. 数字滤波器的系统函数$H(z)$(应确定常数H_0)及其收敛域；(5 分)
2. 数字滤波器的频率响应$\tilde{H}(\Omega)$(或$H(e^{j\Omega})$)，并仍以$N=2$为例，概画出幅频响应$|\tilde{H}(\Omega)|$和相频响应$\tilde{\varphi}(\Omega)$，它是什么类型(低通、高通、带通、全通、线性相位等)滤波器？(7 分)
3. 数字滤波器的单位冲激响应$h[n]$，它是 FIR 还是 IIR 滤波器？并以$N=2$为例，概画出$h[n]$的序列图形。(6 分)
4. 仍以$N=2$为例，试分别画出基于系统函数$H(z)$和单位冲激响应$h[n]$的、该滤波器的两种实现结构(或信号流图)；(10 分)
5. 为了设计频率响应$\tilde{H}_1(\Omega)=\tilde{H}(\Omega-\pi)$的新的数字滤波器，它又是什么类型(低通、高通、带通、全通、线性相位、FIR 和 IIR 等)滤波器？并仍以$N=2$为例，画出新滤波器的两种相应的结构(或信号流图)。(7 分)

五、长途电信网中由于传输线两端负载不匹配，会产生反射现象，若发射信号为$x_c(t)$，经两端多次反射到接收端的信号$y_c(t)$可以表示如下，其中，α为信号来回反射一次的衰减，T_0为来回一次的传输延时。(本题共 20 分)

$$y_c(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l x_c(t-lT_0)$$

1. 试问从$x_c(t)$到$y_c(t)$的系统是否是的 LTI 系统，并写出它的$h(t)$，什么条件下系统稳定？然后，求出它的逆系统的单位冲激响应$h_I(t)$，此逆系统因果、稳定吗？并画出用连续时间相加器、数乘器和纯延时器构成$h_I(t)$的方框图。(8 分)
2. 如果$x_c(t)$是带限于ω_M的带限信号，即其频谱$X(\omega)=0$，$|\omega|>\omega_M$，可以用离散时间(数字)信号处理的方法，从$y_c(t)$中恢复出$x_c(t)$，处理的方框图如下：



又已知反射延时T_0满足$\pi/\omega_M<T_0<\pi/2\omega_M$，若取抽样间隔$T=T_0/2$，会产生混叠吗？。并试求在$T=T_0/2$时，上图中数字滤波器的单位冲激响应$h_d[n]$，写出其差分方程表示，画出它用三种离散时间基本单元构成的系统方框图(或信号流图)。(12 分)

中国科学院 & 中国科学技术大学

2004年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

试题名称： 信号与系统

一. 试求下列各题 (共25分)

1. $y(t)=x(t)*h(t)=\left[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\right]*\frac{d}{dt}h(t)$ 4分

$h(t)=\frac{d}{dt}s(t)=u(t)-2u(t-T)+u(t-2T)$ 2分

$\frac{d}{dt}h(t)=\delta(t)-2\delta(t-T)+\delta(t-2T)$ 1分

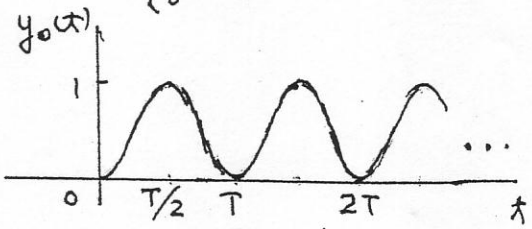
令 $y_0(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\frac{\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)u(\tau)d\tau=\left[\int_{0}^{t}\frac{\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)d\tau\right]u(t)$

$=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]u(t)$ 4分

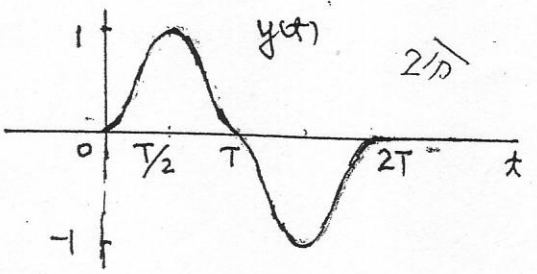
$y_0(t)$ 的波形如右图所示，因此

$y(t)=y_0(t)*[\delta(t)-2\delta(t-T)+\delta(t-2T)]$

$=y_0(t)-2y_0(t-T)+y_0(t-2T)$ 2分



则此波形如右下图所示



2. 当输入 $x[n]=\delta[n]$ 时，左边的

右边为 $\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=u[n]$，因此

系统的单位冲激响应 $h[n]$ 满足以下差分方程为：

$h[n]+0.5h[n-1]-0.5h[n-2]=u[n]$. 3分

由于系统为因果LTI系统，故有 $h[n]=0$，$n<0$，只要用后推方

程还推出 $h[n]$，$n\geq 0$ 的各个序列值，后推方程为

$h[n]=u[n]-0.5h[n-1]+0.5h[n-2]$ 3分

当 $n=0$ 时，$h[0]=u[0]-0.5h[-1]+0.5h[-2]=1$

$n=1$ 时，$h[1]=u[1]-0.5h[0]+0.5h[-1]=0.5$

$n=2$ 时 $h[2]=u[2]-0.5h[1]+0.5h[0]=1.25$

$n=3$ 时 $h[3]=u[3]-0.5h[2]+0.5h[1]=0.625$

$n=4$ 时 $h[4]=u[4]-0.5h[3]+0.5h[2]=1.3125$

⋮ ⋮ } 4分

中国科学院 & 中国科学技术大学

2004年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

二. 解下列3小题（每小题15分，共45分）

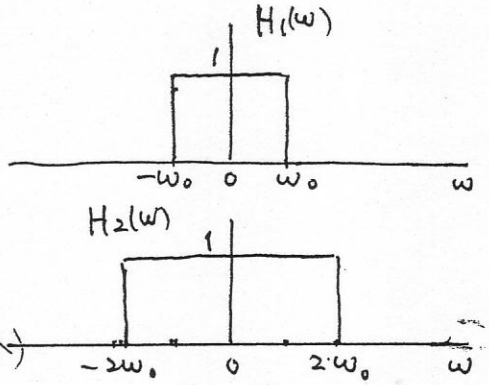
1. $h(t)=h_0(t-1)$，$h_0(t)=\dfrac{\sin\omega_0 t}{\pi t}\cdot\dfrac{\sin 2\omega_0 t}{\pi t}$ 2分

$H(\omega)=H_0(\omega)e^{-j\omega}$，利用频域卷积性质，可求得 $h_0(t)$ 的傅里叶变换，

即 $H_0(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}H_1(\omega)*H_2(\omega)$，其中

$$H_1(\omega)=\mathcal{F}\left\{\frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}\right\}=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_0\\ 0, & |\omega|>\omega_0\end{cases}$$

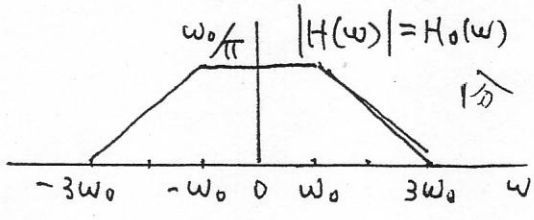
$$H_2(\omega)=\mathcal{F}\left\{\frac{\sin 2\omega_0 t}{\pi t}\right\}=\begin{cases}1, & |\omega|<2\omega_0\\ 0, & |\omega|>2\omega_0\end{cases}$$



它们分别为截止频率为 ω_0 和 $2\omega_0$ 的理想低通滤波器，分别如右图所示。（6分）

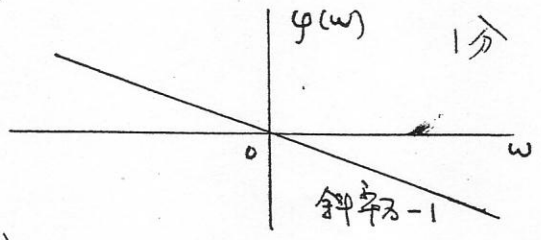
利用图解法或卷积积分可求得

$$H_0(\omega)=\begin{cases}(\omega+3\omega_0)/2\pi & -3\omega_0\le\omega\le-\omega_0\\ \omega_0/\pi & |\omega|<\omega_0\\ (3\omega_0-\omega)/2\pi & \omega_0\le\omega\le 3\omega_0\\ 0 & |\omega|>3\omega_0\end{cases}$$



1分

（4分）



1分

系统频率响应 $H(\omega)$ 为

$$H(\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}=\mathcal{F}\{h_0(t-1)\}$$
$$=H_0(\omega)e^{-j\omega}$$

（1分）

故幅频响应 $|H(\omega)|=H_0(\omega)$，相频响应为 $\varphi(\omega)=-\omega$，它们的图形如右图所示。

2. 由于连续时间LTI系统的单位冲激响应 $h(t)$ 和其单位阶跃响应的关系为 $h(t)=\dfrac{d}{dt}s(t)$，因此系统函数 $H(s)=s\cdot S(s)$，即

$$H(s)=\frac{2s}{(s^2+2s+10)(e^{4s}-1)},\quad \mathrm{Re}\{s\}>0.$$ 2分

并可改写成 $H(s)=\dfrac{2s\,e^{-4s}}{[(s+1)^2+9](1-e^{-4s})}=H_0(s)\dfrac{1}{1-e^{-4s}}\cdot e^{-4s}$ 2分

其中 $H_0(s)=\dfrac{2(s+1)-2}{(s+1)^2+3^2}=\dfrac{2(s+1)}{(s+1)^2+3^2}-\dfrac{2}{3}\dfrac{3}{(s+1)^2+3^2}$ $\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1$

$h_0(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H_0(s)\}=2e^{-t}\cos 3t\,u(t)-\dfrac{2}{3}e^{-t}\sin 3t\,u(t)$ 3分

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{1-e^{-4s}},\ \mathrm{Re}\{s\}>0\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-4n)$ 2分

$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-4s}\}=\delta(t-4)$ 1分

因此，运用拉氏变换的时域卷积性质，可求得

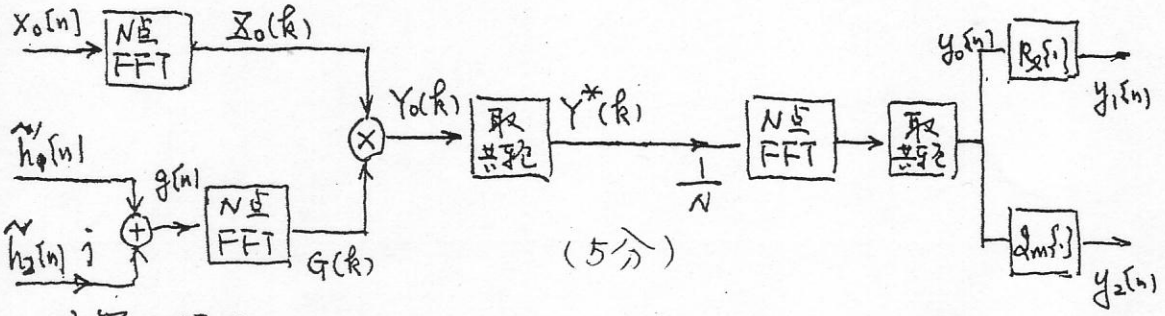
$$h(t)=h_0(t)*\left[\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-4n)\right]*\delta(t-4)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}h_0(t-4(n+1))=\sum_{n=1}^{\infty}h_0(t-4n)$$ 3分

其中 $h_0(t)=e^{-t}\left[2\cos 3t-\dfrac{2}{3}\sin 3t\right]u(t)$.

该系统既因果，又稳定。 2分

3. 仅用3次调成出N点FFT程序，同时分别计算出实序列卷积 $y_1[n]=x[n]*h_1[n]$ 和 $y_2[n]=x[n]*h_2[n]$ 的算法框图如下：



（5分）

该算法说明如下：

① 首先用补零法把 $x[n]$、$h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 构造成3个N点实序列

即. $x_0[n]=\begin{cases}x[n], & n=0,1,\cdots,M-1\\ 0 & n=M,M+1\cdots N-1\end{cases}$ $\xrightarrow{N点DFT}$ $X_0(k)$

$\hat{h}_1[n]=\begin{cases}h_1[n], & n=0,1\cdots L-1\\ 0 & n=L,L+1,\cdots N-1\end{cases}$ $\xleftrightarrow{N点DFT}$ $\hat{H}_1(k)$

$\hat{h}_2[n]=\begin{cases}h_2[n] & n=0,1\cdots L-1\\ 0 & n=L,L+1\cdots N-1\end{cases}$ $\xleftrightarrow{N点DFT}$ $\hat{H}_2(k)$

将两个 N 点实序列 $\hat{h}_1[n]$ 和 $\hat{h}_2[n]$ 分别作为实部和虚部，构成一个 N 点复序列 $g[n]$

即 $g[n] = \hat{h}_1[n] + j\hat{h}_2[n] \xleftrightarrow{N\text{点 DFT}} G(k) = \hat{H}_1(k) + j\hat{H}_2(k)$ （2分）

② 然后，分别用 N 点 FFT 程序计算 $x_0[n]$ 和 $g[n]$ 的 N 点 DFT $X_0(k)$ 和 $G(k)$，运行 N 点 DFT 程序得到 $Y_0(k)$. 即

$$Y_0(k) = X_0(k)G(k) = X_0(k)\hat{H}_1(k) + jX_0(k)\hat{H}_2(k)$$

并根据 DFT 的正反变换公式，则有

$$y_0[n] = \text{IDFT}\{Y_0(k)\} = \text{DFT}\left\{\frac{1}{N}Y_0^*(k)\right\}$$

可以用 N 点 DFT 程序计算 $Y_0(k)$ 的 N 点 IDFT $y_0[n]$.

（4分）

③ $y_0[n] = \text{IDFT}\{Y_0(k)\} = \text{IDFT}\{X_0(k)\hat{H}_1(k) + jX_0(k)\hat{H}_2(k)\}$

$$= x_0[n] * \hat{h}_1[n] + j\,x_0[n] * \hat{h}_2[n]$$

$$= y_1[n] + j\,y_2[n].$$

由于 $x_0[n]$，$\hat{h}_1[n]$ 和 $\hat{h}_2[n]$ 分别是 M 点序列 $x[n]$ 和 L 点序列 $h_1[n]$ 与 $h_2[n]$ 补零加长的序列，且 $N \geq M+L-1$，因此上述计算结果 $y_0[n]$ 的实部 $y_1[n]$ 和虚部 $y_2[n]$ 正是 $x[n]*h_1[n]$ 和 $x[n]*h_2[n]$. 因此只要对 $y_0[n]$ 取实部和虚部，分别可得到 $x[n]*h_1[n]$ 和 $x[n]*h_2[n]$，即

$$y_1[n] = \text{Re}\{y_0[n]\}, \qquad y_2[n] = \text{Im}\{y_0[n]\}$$

（4分）

三、2小题分别求解如下：（共25分）

1. $h(t)$ 可以写成 $h(t)=\frac{1}{2T}Sa(\frac{\pi}{T}t)*\left[\delta(t)+2\delta(t-\frac{T}{2})+\delta(t-T)\right]$ (3分)

由于 $\frac{1}{T}Sa(\frac{\pi}{T}t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_{LP}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\pi/T\\ 0, & |\omega|>\pi/T\end{cases}$ (2分)

利用傅里叶变换的时域卷积性质，可以得到该连续时间LTI系统的频率响应 $H(\omega)$

$$H(\omega)=\frac{1}{2}H_{LP}(\omega)\left[1+2e^{-j\frac{\omega T}{2}}+e^{-j\omega T}\right]$$

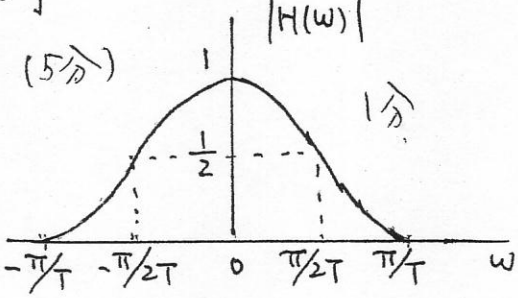
$$=\frac{1}{2}H_{LP}(\omega)e^{-j\frac{\omega T}{2}}\left[e^{j\frac{\omega T}{2}}+e^{-j\frac{\omega T}{2}}\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos\omega T)H_{LP}(\omega)e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$ (5分)

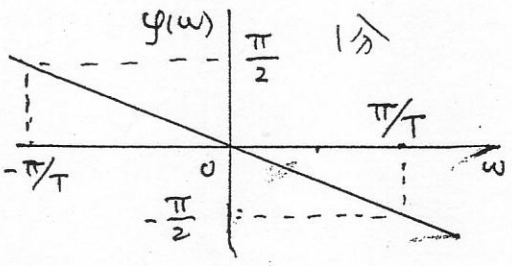
因此，有

$$|H(\omega)|=\begin{cases}\frac{1+\cos\omega T}{2}, & |\omega|<\pi/T\\ 0, & |\omega|>\pi/T\end{cases}$$ 1分

$$\varphi(\omega)=-\frac{\omega T}{2}$$



1分



1分

幅频响应 $|H(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi(\omega)$ 如图所示有图所示，这是一个具有线性相位的升余弦低通滤波器。(2分)

2. 输入 $x(t)$ 可以看成两部分之和，即 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ (1分)

其中 $x_1(t)=x_0(t)\sin(\frac{2\pi}{T}t)$

由于 $x_0(t)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2T}t)}{\pi t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_0(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\pi/2T\\ 0, & |\omega|>\pi/2T\end{cases}$

故 $x_1(t)$ 为带限为 $(\pi/2T)$ 的矩形频谱信号 $x_0(t)$ 的正弦调制信号，正弦载波频率为 $\frac{2\pi}{T}$，则频谱为：

$$X_1(\omega)=\mathcal{F}\{x_1(t)\}=\frac{1}{2}\left[X_0(\omega+\frac{2\pi}{T})-X_0(\omega-\frac{2\pi}{T})\right].$$

由此 $x_1(t)$ 通过滤波器的输出频谱 $Y_1(\omega)=X_1(\omega)H(\omega)=0$.

故 $x_1(t)$ 通过滤波器后输出 $y_1(t)=0$. (4分)

$x(t)$ 中第2部分 $x_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\cos\left[k\frac{\pi}{2T}t+\frac{k\pi}{4}\right]$，这是一个实周期信号的三角级数展开，基波频率 $\omega_0=\pi/2T$，由于滤波器的频率响应在 $k\frac{\pi}{2T}$ 处为：

$$H\left(k\frac{\pi}{2T}\right)=\begin{cases}1, & k=0\\ \frac{1}{2}e^{-j\frac{k\pi}{4}}, & k=1\\ 0, & k\geq 2\end{cases}$$

因此只有 $x_2(t)$ 中的直流分量和基波分量可以通过该滤波器，二次以上的谐波均被抑制. 即 $x_2(t)$ 通过滤波器后的输出为

$$y_2(t)=1+\frac{1}{4}\cos\left[\frac{\pi}{2T}t\right] \quad (4分)$$

最后，$x(t)$ 通过系统的输出为 $y(t)=y_1(t)+y_2(t)=1+\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2T}t\right)$ (1分)

四、本题的5个小题分别求解如下：(共35分)

1. 根据数字滤波器的零、极点分布，其系统函数为

$$H(z)=H_0(1+z^{-1})^{2N},\quad |z|>0. \quad (4分)$$

由于滤波器零频输入的响应为1，即 $H(z)|_{z=1}=1$，故 $H_0=\frac{1}{2^{2N}}$

因此有 $H(z)=\frac{1}{2^{2N}}(1+z^{-1})^{2N}$，$|z|>0$. (1分)

2. $\tilde{H}(\Omega)=H(z)|_{z=e^{j\Omega}}=\frac{1}{2^{2N}}(1+e^{-j\Omega})^{2N}$

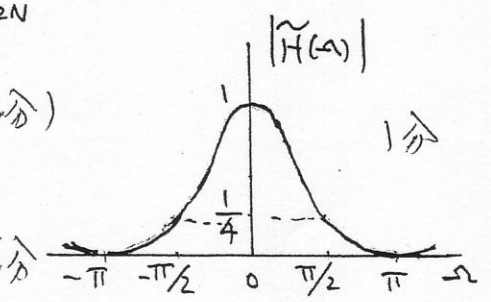
$$=\left[\cos\frac{\Omega}{2}\right]^{2N}e^{-jN\Omega} \quad (3分)$$

当 $N=2$ 时 $\tilde{H}(\Omega)=\left[\cos\frac{\Omega}{2}\right]^4e^{-j2\Omega}$

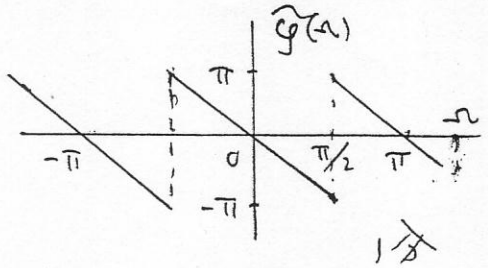
幅频响应为 $|\tilde{H}(\Omega)|=\left[\cos\frac{\Omega}{2}\right]^4$

相频响应为 $\tilde{\varphi}(\Omega)=-2\Omega$ } 1分

之间的图形如右图所示。



1分



1分

可见该数字滤波器是线性相位低通滤波器. (1分)

3. $h[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{(1+z^{-1})^{2N}}{2^{2N}},\ |z|>0\right\}$

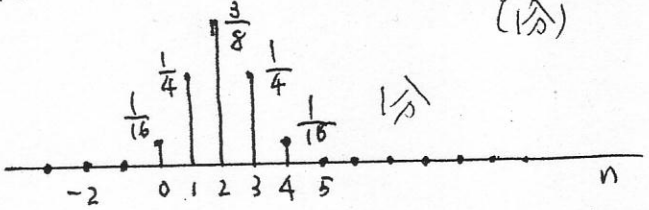
$$=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{2N}\frac{(2N)!}{k!(2N-k)!}z^{-k},\ |z|>0\right\}\frac{1}{2^{2N}}$$

$$=\sum_{k=0}^{2N}\frac{1}{2^{2N}}\frac{(2N)!}{k!(2N-k)!}\delta[n-k]. \quad (4分)$$

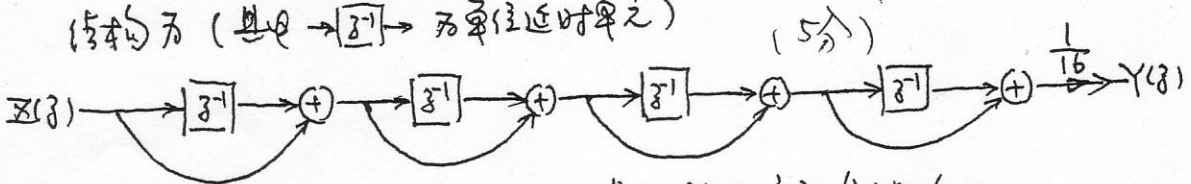
这是一个(2N+1)点为二项式作权系列，这是 FIR 数字滤波器.

当 $N=2$ 时，$h[n]=\frac{1}{16}(\delta[n]+4\delta[n-1]+6\delta[n-2]+4\delta[n-3]+\delta[n-4])$ (1分)

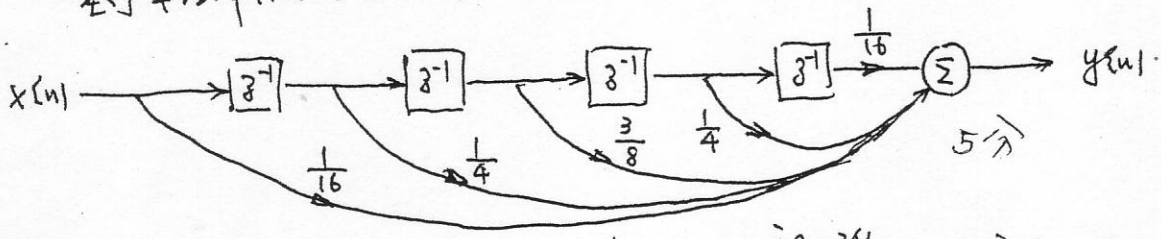
序列图形如右图所示



4. 当 $N=2$ 时，基于系统函数的数字滤波器的级联实现结构为（其中 $\to\boxed{z^{-1}}\to$ 为单位延时器之）(5分)



基于单位脉冲响应 $h[n]$ 的 FIR 滤波器直接实现结构为.

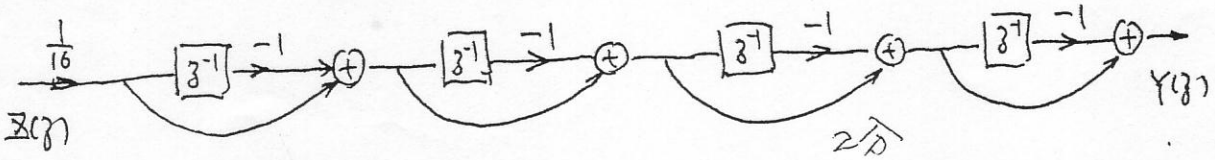


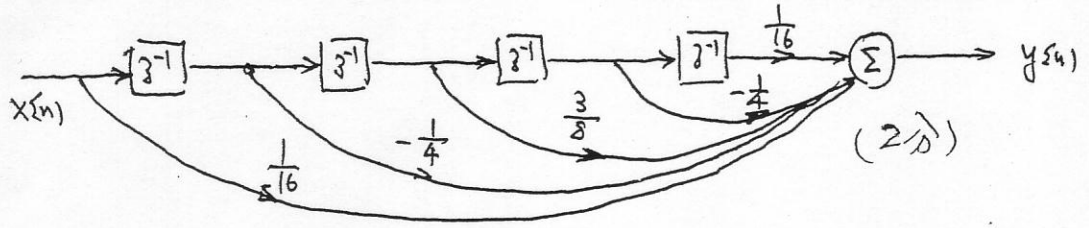
5. 新滤波器 $H_1(\omega)=H(\omega-\pi)=\frac{1}{2^{2N}}(1-e^{-j\omega})^{2N}$ (1分)

其系统函数为 $H_1(z)=\frac{1}{2^{2N}}(1-z^{-1})^{2N}$. (1分)

单位脉冲响应为 $h_1[n]=\sum_{k=0}^{2N}(-1)^k\frac{1}{2^{2N}}\frac{(2N)!}{k!(2N-k)!}\delta[n-k]$. (1分)

因此，当 $N=2$ 时的两种结构分别为：





(2分)

五. 本题中 2 小题分别求解如下 (共 20 分)

1. 按题意输出 $y_c(t)$ 可写成 $y_c(t)=x_c(t)*\left[\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l\delta(t-lT_0)\right]$

取这一个单位冲激响应 $h(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l\delta(t-lT_0)$ 为因果 LTI 系统

系统稳定必须 $|\alpha|<1$. (3分)

其系统函数 $H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}=\sum_{l=0}^{\infty}(\alpha e^{-sT_0})^l=\frac{1}{1-\alpha e^{-sT_0}}$ (4分)

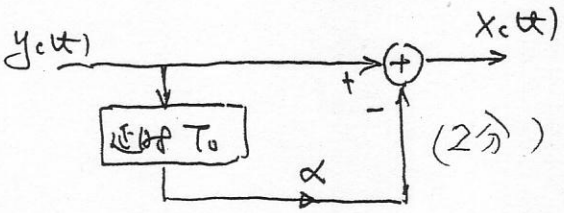
则逆系统的系统函数为 $H_I(s)=\frac{1}{H(s)}=1-\alpha e^{-sT_0}$ (2分)

此逆系统既因果,又稳定。

逆系统单位冲激响应为

(1分) $h_I(t)=\delta(t)-\alpha\delta(t-T_0)$

其方框图实现如右图所示。



(2分)

2. 由于 $x_c(t)$ 是带限于 ω_M 的带限信号,且 $\frac{\pi}{\omega_M}<T_0<\frac{2\pi}{\omega_M}$,故题图中

的抽样间隔选 $T=T_0/2$ 就是不产生混叠的条件 $T\le\frac{\pi}{\omega_M}$. (1分)

冲激抽样后 $y_p(t)=y_c(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y_c(nT)\delta(t-nT)$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l x_c[(n-2l)T]\right\}\delta(t-nT)$$

转换成为离散时间序列 $y[n]=y_c(nT)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l x_c[(n-2l)T]$ (3分)

为使题图中最后的输出恢复成 $x_c(t)$.

则理想抽样后滤波器 $H_L(\omega)$ 的输入应为 $x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_c(nT)\delta(t-nT)$

与序列冲激串转换之前的离散时间系统的输出应为 (2分)

$$x[n]=x_c(nT)$$

因此 离散时间系统的系统函数 $H_d(z)$ 为

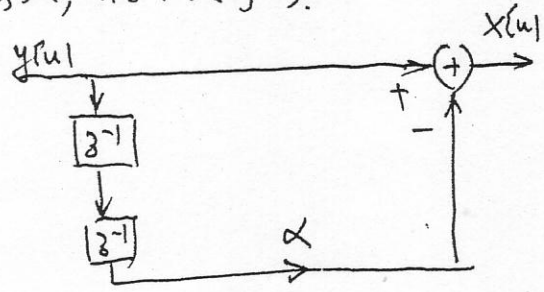
$$H_d(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{Y(z)}{Z\{\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha z^{-2})^k\}}=\frac{Y(z)}{X(z)/(1-\alpha z^{-2})}=1-\alpha z^{-2} \quad (2分)$$

$$h_d[n]=Z^{-1}\{H_d(z)\}=Z^{-1}\{1-\alpha z^{-2}\}=\delta[n]-\alpha\delta[n-2] \quad (1分)$$

其差分方程表示为 $x[n]=y[n]-\alpha y[n-2]$ (1分)

其中 $y[n]$ 为离散时间系统输入，$x[n]$ 为输出.

这两种基本单元构成的实现结构如右图所示



(2分)

2005年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：　信号与系统

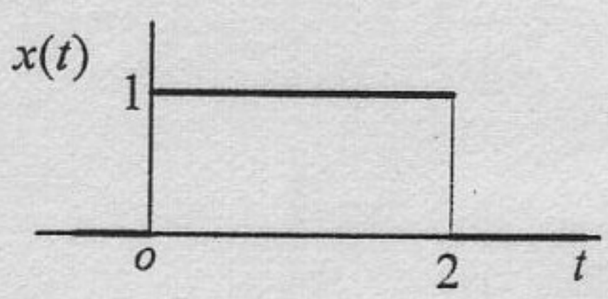
说明：1. 本试卷共七大题，总共150分。

2. 请看清每题的要求，特别注意黑体字。若结果是实函数，必须写出实函数表达式；若要求概画出图形的，必须作必要的标注。

一、已知当输入信号为 $x(t)$ 时，某连续时间因 LTI 系统的输出信号为 $y(t)$，$x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形如图 1.1 所示。试**用时域方法求**：（**共 26 分**）

1. 该系统的单位**阶跃**响应 $s(t)$，并概画出 $s(t)$ 的波形；（**12 分**）

2. 在系统输入为图 1.2 所示的 $x_1(t)$ 时的输出信号 $y_1(t)$，并概画出 $y_1(t)$ 的波形。（**14 分**）



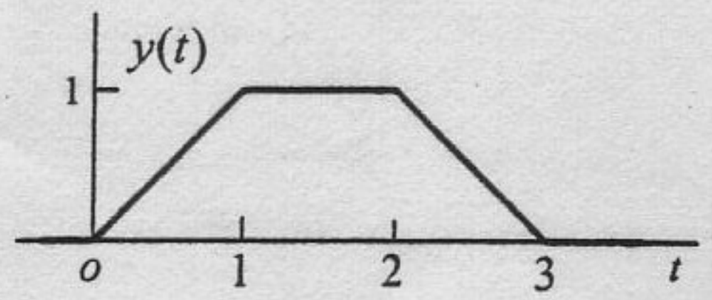


图 1.1

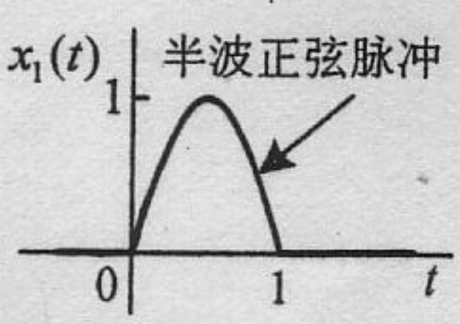


图 1.2

二、由差分方程 $y[n]-0.5y[n-1]=\sum_{k=0}^{4}\left(x[n-k]-2x[n-k-1]\right)$ 和非零起始条件 $y[-1]=1$ 表示的离散时间**因果**系统，当系统输入 $x[n]=\delta[n]$ 时，**试用递推算法求**：（**共 16 分**）

1. 该系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$（至少计算出前 6 个序列值）；（**10 分**）

2. 该系统的零输入响应 $y_{zi}[n]$（至少计算出前 4 个序列值）；（**6 分**）

三、已知连续时间信号 $x(t)=\dfrac{\sin[2\pi(10^3t-1)]}{2\pi(t-10^{-3})}\cos(2\pi\times10^6t)$ 毫安，若它是能量信号，试求其能谱密度函数和它在单位电阻上消耗的能量；若它是功率信号，则求其功率谱密度函数和它在单位电阻上消耗的平均功率。（**共 14 分**）

四、已知 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 4 的周期序列，且已知 8 点序列 $x[n]=\tilde{x}[n]$，$0\le n\le7$，的 8 点 DFT 系数为：$X(0)=X(2)=X(4)=X(6)=1$，$X(k)=0$，其它 k。试求：（**共 24 分**）

1. 周期序列 $\tilde{x}[n]$，并概画出它的序列图形；（**12 分**）

2. 该周期序列 $\tilde{x}[n]$ 通过单位冲激响应为 $h[n]=(-1)^2\dfrac{\sin^2(\pi n/2)}{\pi^2n^2}$ 的数字滤波器后的输出 $y[n]$，并概画出它的序列图形。（**12 分**）

五、已知 $x(t)$ 是最高频率为 4 kHz 的连续时间带限信号，（**共 24 分**）

1. 若对 $x(t)$ 进行**平顶**抽样获得的已抽样信号 $x_p(t)$ 如图 5 所示，试求由 $x_p(t)$ 恢复出 $x(t)$ 的重构滤波器的频率响应 $H_L(\omega)$，并概画出其幅频响应和相频响应；（**16 分**）

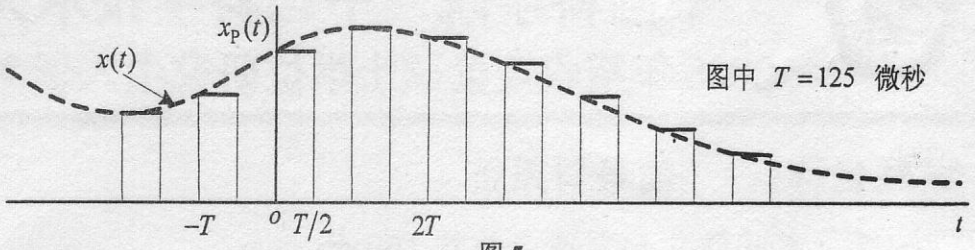


图 5

2. 你在 1 小题求得的重构滤波器为什么不可实现？为实现**无失真**恢复原信号，需对抽样频率和重构滤波器频率响应 $H_L(\omega)$ 作怎样的修改？（**8 分**）

六、如图 6 的信号流图所示的数字滤波器，试求：（**共 22 分**）

1. 它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，并画出它用一个一阶全通滤波器和一个 4 阶 FIR 滤波器的**级联**实现的方框图或信号流图；（**12 分**）
2. 概画出该数字滤波器的幅频响应 $\left|\tilde{H}(\Omega)\right|$（或 $\left|H(e^{j\Omega})\right|$）。（**10 分**）

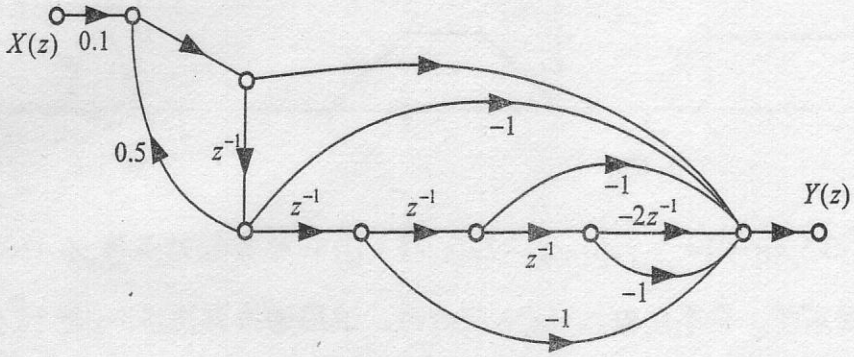


图 6

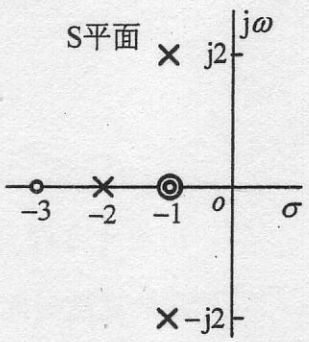


图 7

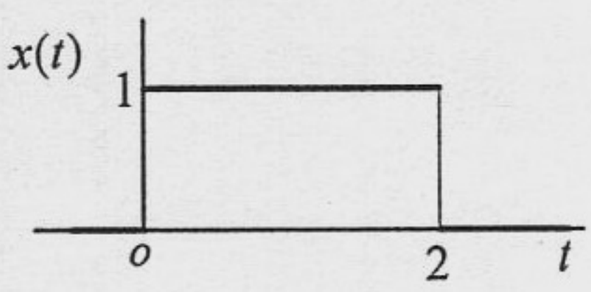
七、某连续时间**实**的**因果** LTI 系统的零、极点见图 7，并已知 $\int_{0_-}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = 1.5$，其中 $h(t)$ 为该系统的单位冲激响应。试求：（**共 24 分**）

1. 它是什么类型的系统（全通或最小相移系统），并求 $h(t)$（应为**实函数**）；（**14 分**）
2. 写出它的线性实系数微分方程表示；（**2 分**）
3. 它的**逆系统**的单位冲激响应 $h_1(t)$，该逆系统是可以实现（即既因果又稳定）的吗？（**8 分**）

试题名称： 信号与系统

一、已知当输入信号为 $x(t)$ 时，某连续时间因 LTI 系统的输出信号为 $y(t)$，$x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形如图 1.1 所示。试用时域方法求：（共 26 分）

1. 该系统的单位阶跃响应 $s(t)$，并概画出 $s(t)$ 的波形；（12 分）
2. 系统输入为图 1.2 所示的 $x_1(t)$ 时的输出信号 $y_1(t)$，并概画出它的波形。（14 分）



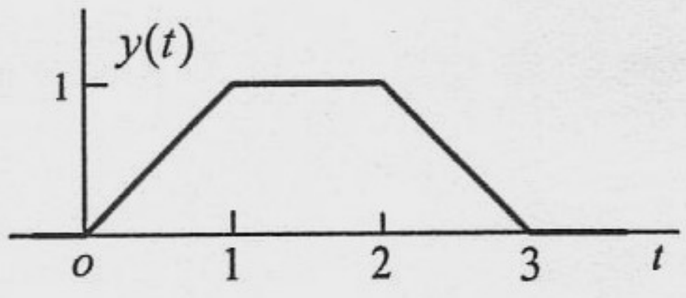


图 1.1

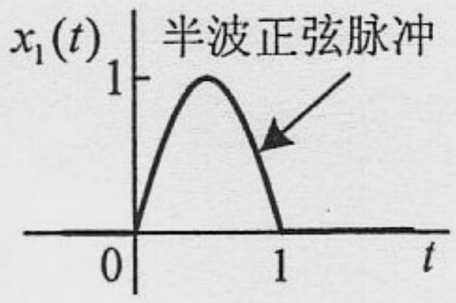


图 1.2

1. 解： 可以用多种不同时域方法求该系统的单位阶跃响应 $s(t)$。

方法一： 先求单位阶跃响应 $h(t)$，再用 $s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau = h(t)*u(t)$ 求出 $s(t)$。

由图 1.1 看出：$x(t)=u(t)-u(t-2)$（1 分）

和
$$\begin{aligned} y(t) &= tu(t)-(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)+(t-3)u(t-3) \\ &= tu(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)-\delta(t-2)+\delta(t-3)] \\ &= u(t)*u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)]*[\delta(t)-\delta(t-2)] \\ &= [u(t)-u(t-2)]*[u(t)-u(t-1)] = x(t)*[u(t)-u(t-1)] \end{aligned}$$
（6 分）

由于该系统是 LTI 系统，$y(t)=x(t)*h(t)$，对比上式可得

$$h(t)=u(t)-u(t-1)$$ （1 分） (2-1)

$h(t)$ 的波形如图 1.3 右图所示。

或者，直接由图 1.1 看出 $y(t)=x(t)*[u(t)-u(t-1)]$，即如图 1.3 所示那样

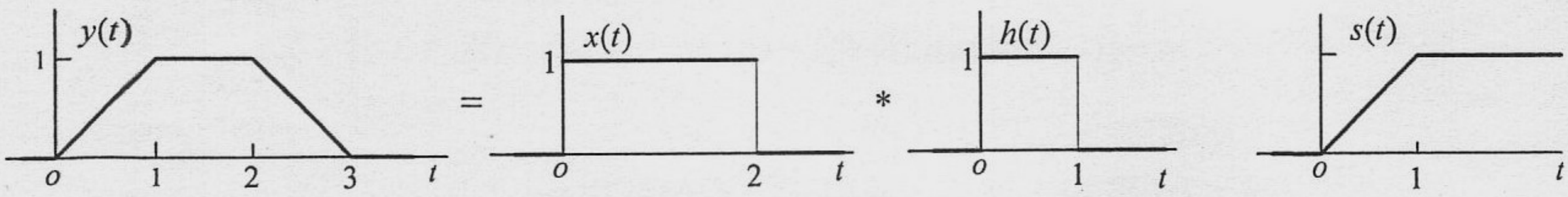


图 1.3（7 分）

图 1.4

由此得到：$h(t)=u(t)-u(t-1)$（1 分）

还可以按如下方法求 $h(t)$：按照卷积积分的微分性质，$y'(t)=x'(t)*h(t)$

显然，$x'(t)=\delta(t)-\delta(t-2)$（2 分），并由 $y(t)$ 波形微分得到 $y'(t)$ 波形如图 1.5 所示，

即 $y'(t)=u(t)-u(t-1)-u(t-2)+u(t-3)$（5 分）

因此得到：$h(t)=u(t)-u(t-1)$（1 分）

然后，$s(t)=h(t)*u(t)=[u(t)-u(t-1)]*u(t)=tu(t)-(t-1)u(t-1)$（2 分） (2-2)

$s(t)$ 的波形如图 1.4 所示。（2 分）

方法二： 直接求出单位阶跃响应 $s(t)$。

LTI 系统的 $s(t)$ 是系统输入为 $u(t)$ 时的输出，由图 1.1 中的 $x(t)$ 的波形可知，

$$u(t)=x(t)+x(t-2)+x(t-4)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x(t-2n)\text{；（4 分）}$$

根据 LTI 系统满足线性性质，系统对 $u(t)$ 的响应 $s(t)$ 为：

$$s(t)=y(t)+y(t-2)+y(t-4)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}y(t-2n)=tu(t)-(t-1)u(t-1)\text{（4 分）}$$

按上式波形叠加图见图 1.6（2 分），由此得到 $s(t)$ 的波形图见上面图 1.4。（2 分）

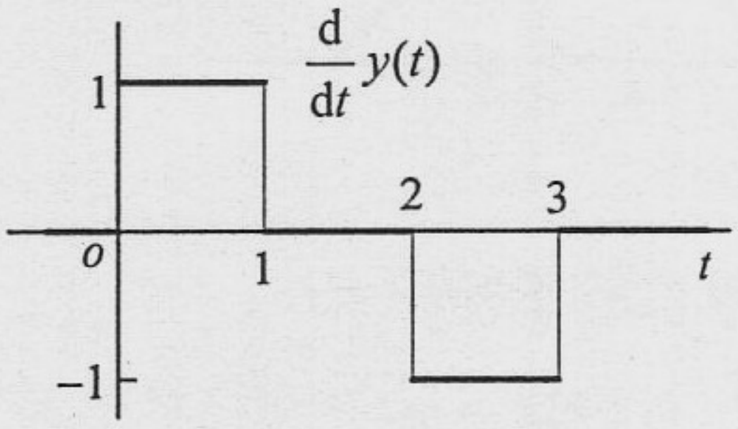


图 1.5

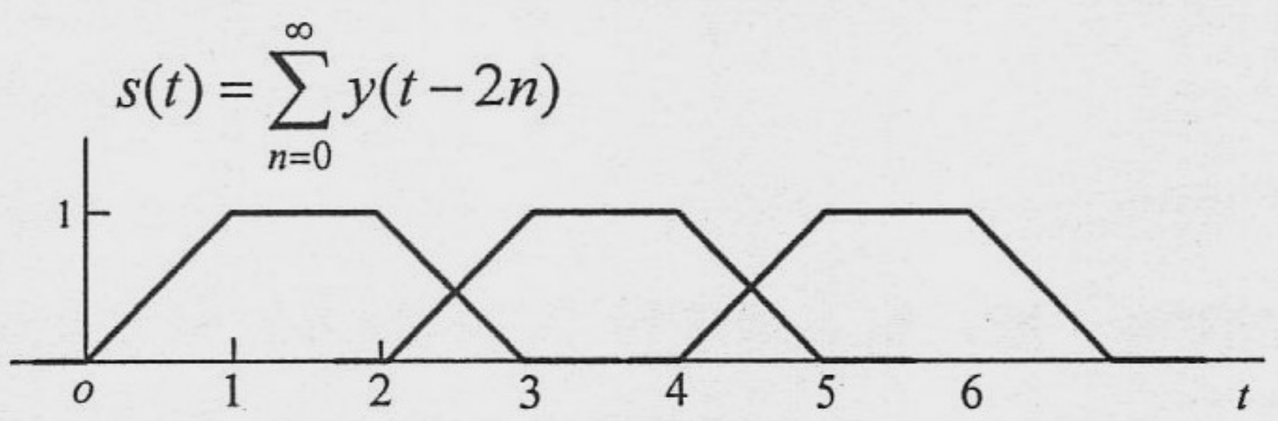


图 1.6

2．解：由 1. 小题已求得：$h(t)=u(t)-u(t-1)$，则有，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$（1 分）

该 LTI 系统当输入 $x_1(t)$ 时的输出信号 $y_1(t)$ 为：

$$y_1(t)=h(t)*x_1(t)=\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}*\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau=\left[\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right]*[\delta(t)-\delta(t-1)]$$

$$=y_0(t)-y_0(t-1)\qquad\text{其中，}y_0(t)=\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau\text{（2 分）}\qquad\text{(2-3)}$$

由图 1.2 可得到：$x_1(t)=(\sin\pi t)[u(t)-u(t-1)]=\sin\pi tu(t)+\sin\pi(t-1)u(t-1)$

$$y_0(t)=\int_{-\infty}^{t}\sin\pi\tau u(\tau)\mathrm{d}\tau-\int_{-\infty}^{t}\sin\pi\tau u(\tau-1)\mathrm{d}\tau=\left[\int_{0}^{t}\sin\pi\tau\mathrm{d}\tau\right]u(t)-\left[\int_{1}^{t}\sin\pi\tau\mathrm{d}\tau\right]u(t-1)$$

$$=\frac{1}{\pi}\{(1-\cos\pi t)u(t)+[1-\cos\pi(t-1)]u(t-1)\}\text{（5 分）}$$

$y_0(t)$ 的波形如图 1.7 所示。（2 分）

将 $y_0(t)$ 代入(2-3)式，得到所求系统输出为：

$$y_1(t)=\frac{1}{\pi}\{(1-\cos\pi t)u(t)-[1-\cos\pi(t-2)]u(t-2)\}\text{（2 分）}\qquad\text{(2-4)}$$

$y_1(t)$ 的波形如图 1.8 所示。（2 分）

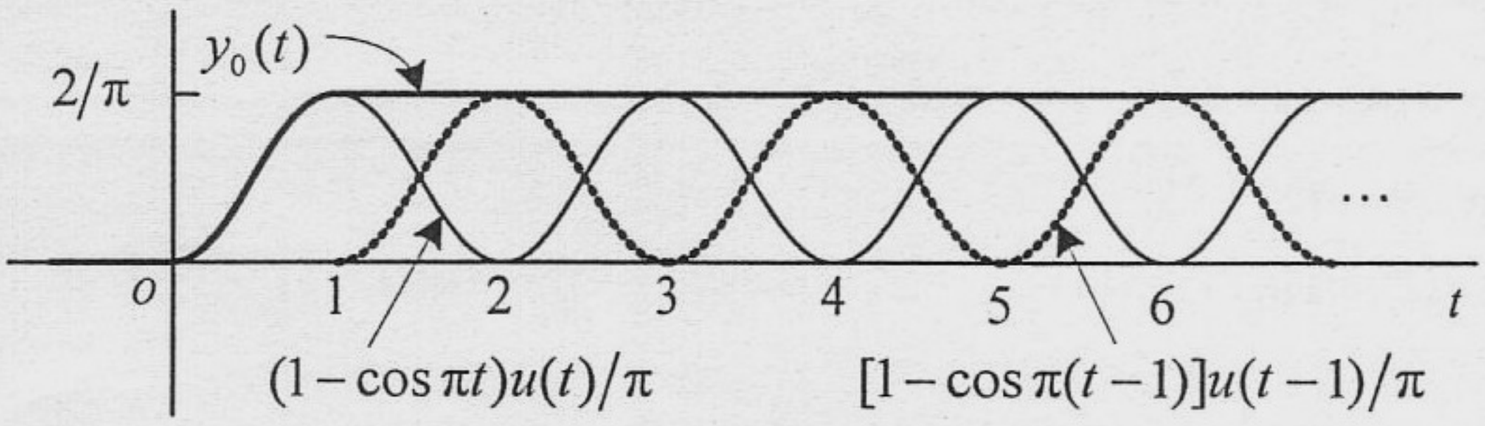


图 1.7

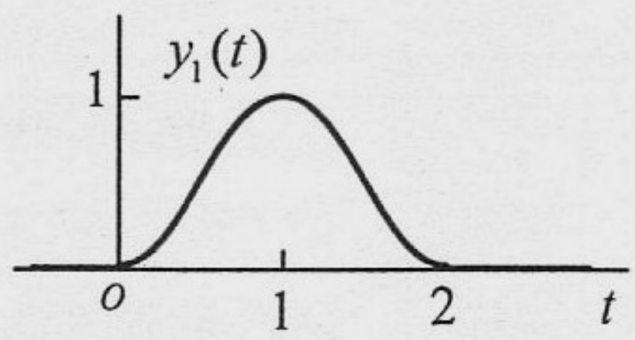


图 1.8

或者，还可以直接用如下的方法求 $y_1(t)$：

$$y_1(t)=x_1(t)*h(t)=x_1(t)*[u(t)-u(t-1)]=y_0(t)-y_0(t-1)\quad（4\text{ 分}）\tag{2-5}$$

其中，$y_0(t)=x_1(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau$，它可以对图 1.2 中的 $x_1(t)$ 波形直接滑动积分得到（6 分），其波形如图 1.7 中的 $y_0(t)$ 所示（2 分），代入(2-5)式，得到图 1.8 所示的 $y_1(t)$。（2 分）

本题如果用拉氏变换方法求，例如按如下方法正确求出 $h(t)$、$s(t)$ 和 $y_1(t)$，按照题意（题目要求用时域方法求），可以考虑给一半分：

1. $x(t)=u(t)-u(t-2)\ \overset{\mathrm{L}}{\longleftrightarrow}\ \left\{\dfrac{1-e^{-2s}}{s},\ R_x=\text{整个 S 平面}\right\}$（0.5 分）

$$y(t)=tu(t)-(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)+(t-3)u(t-3)\ \overset{\mathrm{L}}{\longleftrightarrow}\ \frac{1-\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s}+\mathrm{e}^{-3s}}{s^2},\ R_y=\text{整个 S 平面}\}\text{（1 分）}$$

该 LTI 系统是因果的，其系统函数及其收敛域为

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s}+\mathrm{e}^{-3s}}{s(1-\mathrm{e}^{-2s})}=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s},\quad R_h=\text{整个 S 平面（2 分）}$$

该系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 的拉氏变换为 $S(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s^2}$，$R_S=\{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$（0.5 分）

对上式取反拉氏变换，得到该系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 为

$$s(t)=tu(t)-(t-1)u(t-1)\quad（1\text{ 分}）\tag{2-6}$$

$s(t)$ 的波形如前面图 1.4 所示。（1 分）

2. 令　$y_1(t)\ \overset{\mathrm{L}}{\longleftrightarrow}\ \{Y_1(s),\ R_{y1}\}$，且有

$$x_1(t)=\sin\pi t u(t)+\sin\pi(t-1)u(t-1)\ \overset{\mathrm{L}}{\longleftrightarrow}\ \left\{\frac{\pi(1+e^{-s})}{s^2+\pi^2},\ R_{x1}=\text{整个 S 平面}\right\}\text{（1 分）}$$

$$Y_1(s)=X(s)H(s)=\frac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}(1-\mathrm{e}^{-s})(1+\mathrm{e}^{-s})=\frac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}(1-\mathrm{e}^{-2s})\quad（1\text{ 分}）$$

上式中的 $\dfrac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}$ 可以部分分式展开为 $\dfrac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}=\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+\pi^2}\right]$，代入上式，

则有　$$Y_1(s)=\frac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}(1-\mathrm{e}^{-2s})=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\pi^2}\right](1-\mathrm{e}^{-2s})\quad（2\text{ 分}）\tag{2-7}$$

上式反拉氏变换得到

$$y_1(t)=\frac{1}{\pi}[1-\cos\pi t]u(t)*[\delta(t)-\delta(t-2)]$$

$$=\frac{1}{\pi}\{(1-\cos\pi t)u(t)-[1-\cos\pi(t-1)]u(t-1)\}\quad（2\text{ 分}）\tag{2-8}$$

$y_1(t)$ 的波形见前面图 1.8（1 分）

二、由差分方程 $y[n]-0.5y[n-1]=\sum_{k=0}^{4}\left(x[n-k]-2x[n-k-1]\right)$ 和非零起始条件 $y[-1]=1$ 表示的离散时间因果系统，当系统输入 $x[n]=\delta[n]$ 时，**试用递推算法求：（共 16 分）**

1. 该系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$（至少计算出前 **6** 个序列值）；**（10 分）**
2. 该系统的零输入响应 $y_{zi}[n]$（至少计算出前 **4** 个序列值）；**（6 分）**

1. 解：零状态响应 $y_{zs}[n]$ 的方程可以化为：

$$y_{zs}[n]-0.5y_{zs}[n-1]=x[n]-x[n-1]-x[n-2]-x[n-3]-x[n-4]-2x[n-5];$$

即 $y_{zs}[n]=0.5y_{zs}[n-1]+x[n]-x[n-1]-x[n-2]-x[n-3]-x[n-4]-2x[n-5]$；（3 分）

且有 $y_{zi}[n]=0$，$n<0$（1 分）

当输入 $x[n]=\delta[n]$ 时，递推计算出的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 的前 6 个序列值分别为：

$y_{zs}[0]=1$；（1 分）

$y_{zs}[1]=-1/2$；（1 分）

$y_{zs}[2]=-5/4$；（1 分）

$y_{zs}[3]=-13/8$；（1 分）

$y_{zs}[4]=-29/16$；（1 分）

$y_{zs}[5]=-93/32$。（1 分）

2. 解：零输入响应 $y_{zi}[n]$ 的递推方程可以化为：

$y_{zi}[n]=0.5y_{zi}[n-1]$；且有 $y_{zi}[-1]=y[-1]=-1$；（2 分）

递推计算出的零状态响应 $y_{zi}[n]$ 的前 4 个序列值分别为：

$y_{zi}[0]=-1/2$；（1 分）

$y_{zi}[1]=-1/4$；（1 分）

$y_{zi}[2]=-1/8$；（1 分）

$y_{zi}[3]=-1/16$；（1 分）

三、已知连续时间信号 $x(t)=\dfrac{\sin[2\pi(10^3t-1)]}{2\pi(t-10^{-3})}\cos(2\pi\times10^6t)$ 毫安，若它是能量信号，试求其能谱密度函数和它在单位电阻上消耗的能量；若它是功率信号，则求其功率谱密度函数和它在单位电阻上消耗的平均功率。**（共 14 分）**

解：令：　$x_1(t)=\dfrac{\sin[2\pi\times10^3t]}{2\pi t}$　和　$x_2(t)=x_1(t-10^{-3})$；

则有　$x(t)=x_2(t)\times\cos(2\pi\times10^6t)$

由于 $x_2(t)$ 仅仅是对 $x_1(t)$ 的时延；$x(t)$ 是对 $x_2(t)$ 的调制；$x_1(t)$ 是能量信号，整个 $x(t)$ 是能量信号。（2 分）

利用帕什瓦尔定理求连续时间信号 $x(t)$ 在单位电阻上消耗的能量

再令：$x_i(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X_i(\omega)$，$i=1,\ 2$ 和 $x(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X(\omega)$

则有 $|X_2(\omega)| = X_1(\omega) = \begin{cases} 0.5, & |\omega| < 2\pi\times10^3 \\ 0, & |\omega| > 2\pi\times10^3 \end{cases}$（2 分）

和 $|X(\omega)| = \dfrac{1}{2\pi} X_1(\omega) * \pi[\delta(\omega+2\pi\times10^6)+\delta(\omega-2\pi\times10^6)]$（4 分）

$x(t)$ 的幅度频谱 $|X(\omega)|$ 如图 3.1 所示。（2 分）

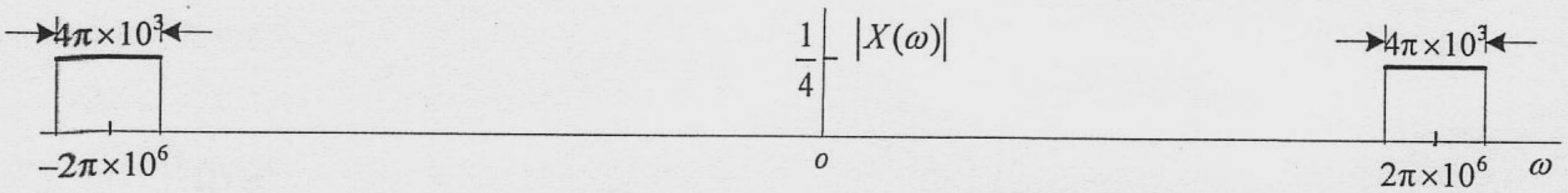


图 3.1

$x(t)$ 在单位电阻上消耗的能量 E_x 为：

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = 10^{-3}(J)$$（4 分）

四、已知 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 4 的周期序列，且已知 8 点序列 $x[n]=\tilde{x}[n]$，$0\le n\le 7$，的 8 点 DFT 系数为：$X(0)=X(2)=X(4)=X(6)=1$，$X(k)=0$，其它 k。试求：（**共 24 分**）

1. 周期序列 $\tilde{x}[n]$，并概画出它的序列图形；（**12 分**）
2. 该周期序列 $\tilde{x}[n]$ 通过单位冲激响应为 $h[n]=(-1)^2\dfrac{\sin^2(\pi n/2)}{\pi^2 n^2}$ 的数字滤波器后的输出 $y[n]$，并概画出它的序列图形。（**12 分**）

1. **解**：先利用 IDFT 求 $x[n]$，$0\le n\le 7$：

即 $x[n]=\dfrac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}X(k)e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{8}kn}=\dfrac{1}{8}\times[1+(-1)^n+(\mathrm{j})^n+(-\mathrm{j})^n]=\dfrac{1}{8}\left[1+(-1)^n+2\cos\dfrac{\pi n}{2}\right]$,（8 分）

计算得到：$x[n]=\begin{cases}0.5 & n=0,\ 4\\ 0 & n\ne 0,\ 4\end{cases}$，$0\le n\le 7$（2 分）

$\tilde{x}[n]$ 是 $x[n]$ 以周期为 8 的周期延拓，它的序列图形如图 4.1 所示。（1 分）

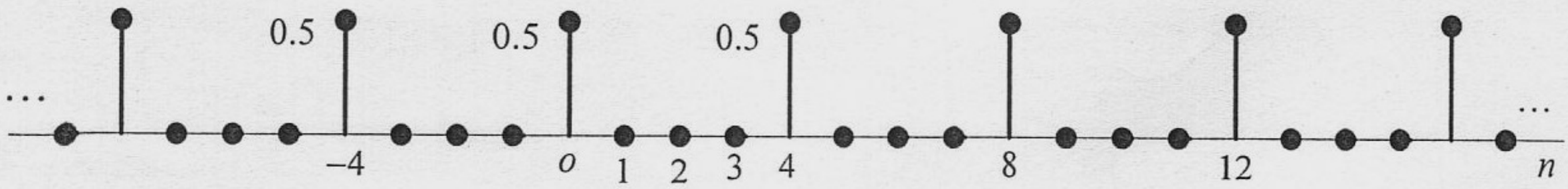


图 4.1

即 $\tilde{x}[n]=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x[n-8l]=\dfrac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta[n-4l]$（1 分）　　(4-1)

或者，由于 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 4 的周期序列，8 点序列 $x[n]=\tilde{x}[n]$，$0\le n\le 7$，包含了 $\tilde{x}[n]$ 的两个完整的周期。根据 DFT 的性质，4 点序列 $x_0[n]=\tilde{x}[n]$，$0\le n\le 3$，的 4 点 DFT

系数为：$X_0(k)=0.5X(2k)=0.5$，$0\le k\le 3$，其中 $X(k)$，$0\le k\le 7$，就是已知的 8 点 DFT 系数（6 分）。再用 4 点 IDFT，求出 4 点序列的序列值：$x_0[0]=0.5$，$x_0[n]=0$，$1\le n\le 3$（4 分）。$\tilde{x}[n]$是$x_0[n]$以 4 的周期延拓，其序列图形如图 4.1 所示。（1 分）

2. 解：先求该离散时间 LTI 系统的频率响应 $\tilde{H}(\Omega)$

令：$h_1[n]=\dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\tilde{H}_1(\Omega)$ 和 $h[n]=(-1)^n h_1^2[n]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\tilde{H}(\Omega)$

则有 $\tilde{H}_1(\Omega)=\begin{cases}1, & |\Omega|<\pi/2\\ 0, & |\Omega|>\pi/2\end{cases}$，在主值区间$(-\pi,\ \pi)$内（1 分）　(4-2)

$\tilde{H}_1(\Omega)$图形如图 4.2 所示。（1 分）

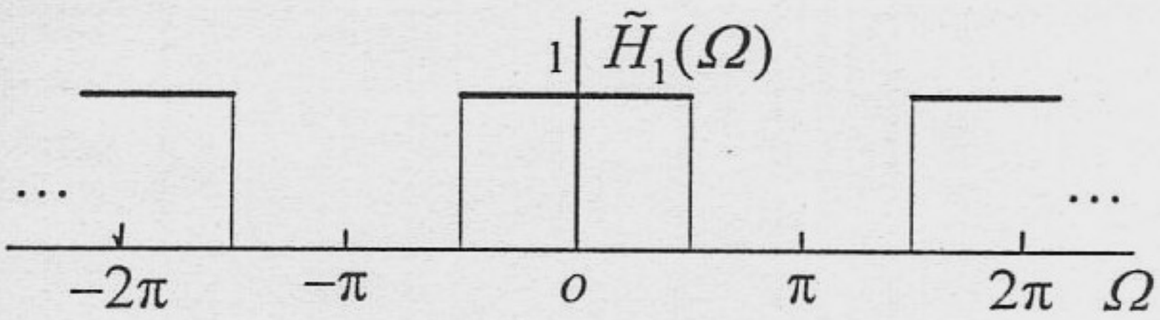


图 4.2

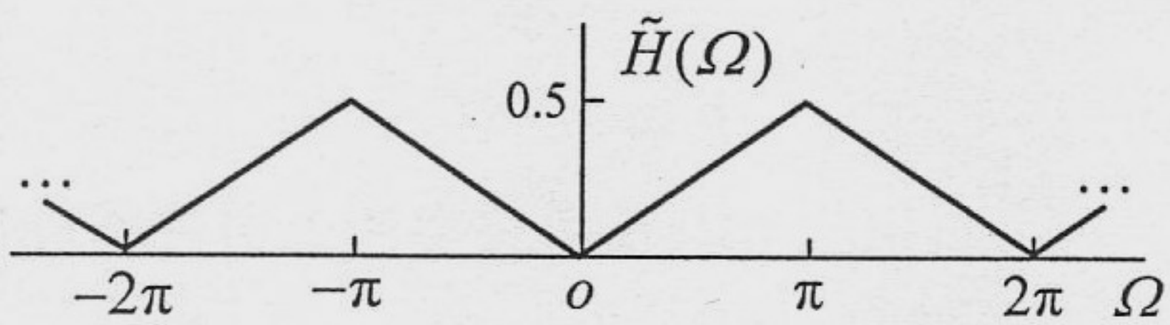


图 4.3

根据频域卷积性质和频移 π 的频移性质，则有

$\tilde{H}(\Omega)=(1/2\pi)\tilde{H}_1(\Omega)\circledast\tilde{H}_1(\Omega)\circledast\delta(\Omega-\pi)$；$\tilde{H}(\Omega)$的图形如图 4.3 所示。（3 分）

由(4-1)式或图 4.1，$\tilde{x}[n]$的 DFS 系数为：

$\tilde{X}_k=1/8$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3\ \cdots$，谱线间隔为 $\Omega=\pi/2$（2 分）

或者，$\tilde{x}[n]$的 DTFT 为：$\tilde{X}(\Omega)=\dfrac{\pi}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\dfrac{\pi}{2})$（2 分）

$\tilde{x}[n]$通过 $\tilde{H}(\Omega)$ 后的输出 $y[n]$ 也是周期为 4 的周期序列，它的 DFS 系数为

$\tilde{Y}_k=\begin{cases}1/32, & k=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \cdots\\ 1/16, & k=\pm2,\ \pm6,\ \pm10,\ \cdots\end{cases}$，谱线间隔为 $\Omega=\pi/2$（2 分）

或者，$y[n]$的 DTFT 为

$$\tilde{Y}(\Omega)=\tilde{X}(\Omega)\tilde{H}(\Omega)=\frac{\pi}{16}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left[\Omega-(2k-1)\frac{\pi}{2}\right]+\frac{\pi}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left[\Omega-(2k-1)\pi\right]$$（2 分）

由 DFS 的合成公式或 DTFT 反变换，输出序列 $y[n]$ 为

$$y[n]=\frac{1}{16}e^{j\pi n}+\frac{1}{32}\left[e^{j(\pi/2)n}+e^{-j(\pi/2)n}\right]=\frac{1}{16}\left[(-1)^n+\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]$$（2 分）　(4-3)

它的序列图形如图 4.4 所示（1 分）

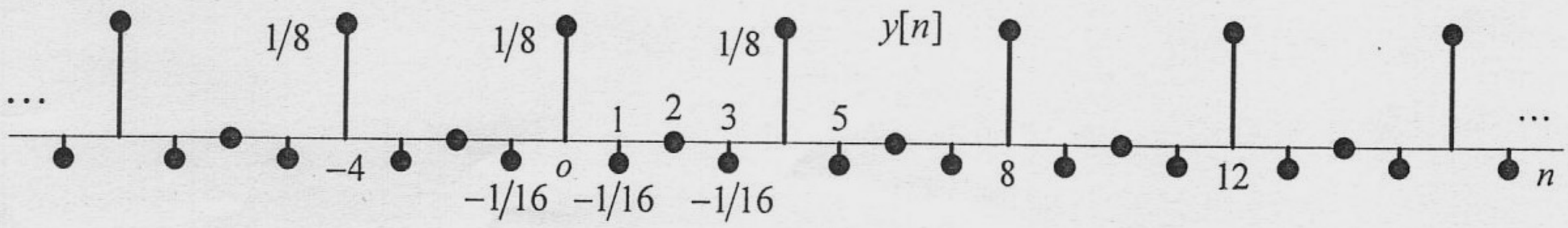


图 4.4

五、已知 $x(t)$ 是最高频率为 4 kHz 的连续时间带限信号，（**共 24 分**）

1. 若对 $x(t)$ 进行**平顶**抽样获得的已抽样信号 $x_P(t)$ 如图 5 所示，试求由 $x_P(t)$ 恢复出 $x(t)$ 的重构滤波器的频率响应 $H_L(\omega)$，并概画出其幅频响应和相频响应；（**16 分**）

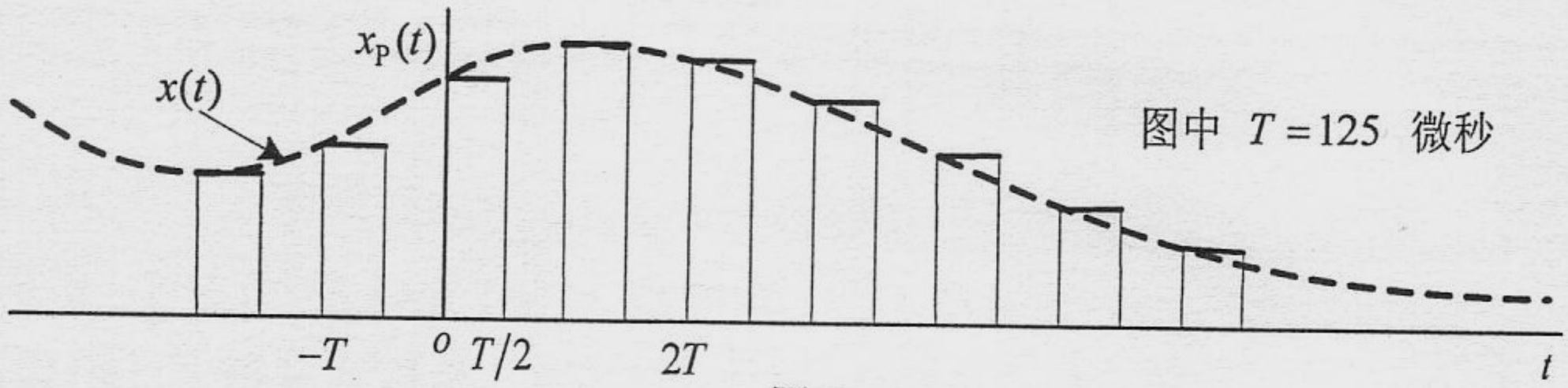


图 5

2. 你在 1 小题求得的重构滤波器为什么不可实现？为实现**无失真**恢复原信号，需对抽样频率和重构滤波器频率响应 $H_L(\omega)$ 作怎样的修改？（**8 分**）

1. 解：图 5 的平顶抽样信号 $x_P(t)$ 可表示为

$$x_P(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)\right]*h_0(t)\quad（2\text{ 分}）\tag{5-1}$$

其中，$h_0(t)=\begin{cases}1, & 0<t<T/2\\ 0, & t<0,\ t>T/2\end{cases}$ 是零阶保持系统的单位冲激响应（0.5 分）　(5-2)

$h_0(t)$ 的波形如图 5.1 所示。（0.5 分）由于带限信号 $x(t)$ 的最高频率为 4 kHz，抽样间隔 $T=125$ 微秒，即抽样频率为 8 kHz，故上述抽样是临界抽样。

若令：　$x(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X(\omega)=0$，$|\omega|>8\pi\times10^3$（假设如图 5.1 所示）

和　$x_P(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X_P(\omega)$

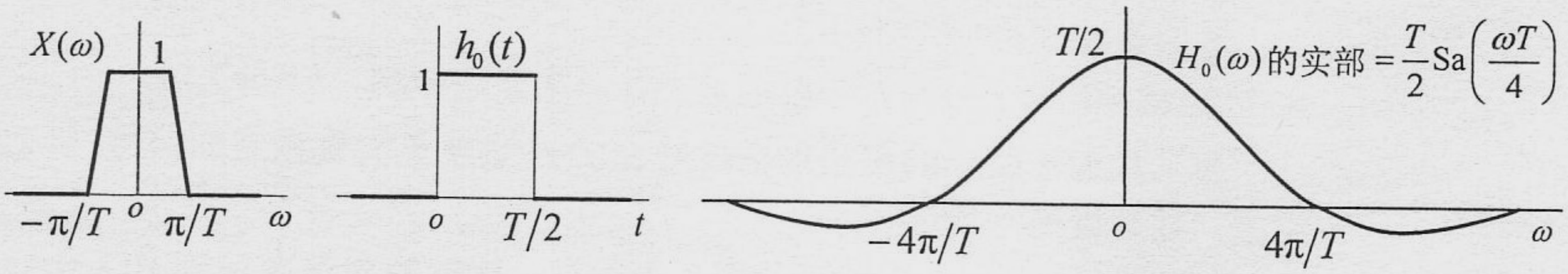


图 5.1　图中 $\omega_M=\pi/T=8\pi\times10^3$

根据傅里叶变换的频域卷积性质和时域卷积性质，则有

$$X_P(\omega)=\left\{\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)\right\}H_0(\omega)\quad（2\text{ 分}）\tag{5-3}$$

其中，$P(\omega)$ 和 $H_0(\omega)$ 分别是单位周期冲激串 $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ 和(5-2)式表示的零阶保持系统 $h_0(t)$ 的傅里叶变换，且有

$P(\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$ 和 $H_0(\omega)=\frac{T}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}$（2 分），其中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}$ 是移线性相移因子。$H_0(\omega)$ 的实部如图 5.1 所示。（1 分）把他们代入(5-3)式，得到

$$X_{\mathrm{P}}(\omega)=\frac{1}{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)\right\}\frac{T}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}\quad（3\text{ 分}）\tag{5-4}$$

其中，$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}$ 是移线性相移因子。$X_{\mathrm{P}}(\omega)$ 的实部如图 5.2 所示。（1 分）

如果要从 $x_{\mathrm{P}}(t)$ 恢复出 $x(t)$，只要把 $X_{\mathrm{P}}(\omega)$ 变成 $X(\omega)$ 即可。由图 5.1 和图 5.2，以及(5-4)式可知，为了 $X(\omega)=X_{\mathrm{P}}(\omega)H_{\mathrm{L}}(\omega)$，重构滤波器 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 应为

$$H_{\mathrm{L}}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{2}{\mathrm{Sa}(\omega T/4)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}, & |\omega|<\dfrac{\pi}{T}\\ 0, & |\omega|<\pi/\mathrm{T}\end{cases}$$，其中，$\frac{\pi}{T}=8\pi\times10^3$（3 分）　(5-5)

所求重构滤波器 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 的幅频特性 $|H_{\mathrm{L}}(\omega)|$ 和相频特性 $\varphi_{\mathrm{L}}(\omega)$ 如图 5.2 所示（1 分）

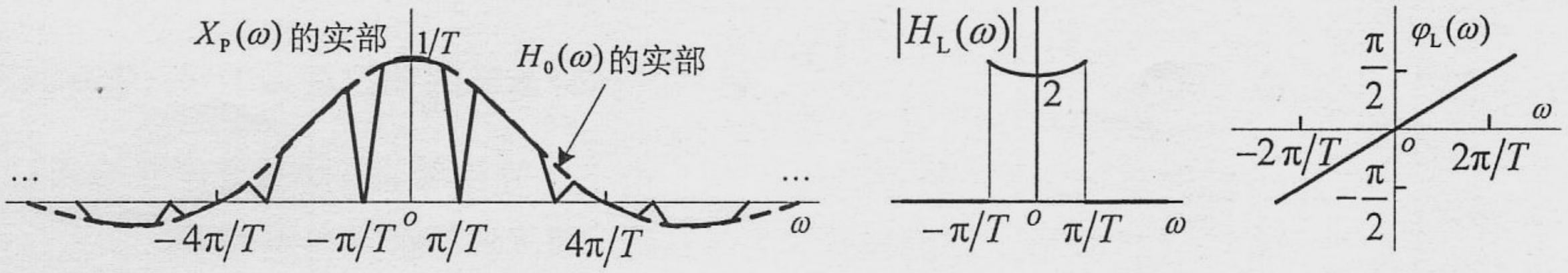


图 5.2　图中 $\omega_{\mathrm{M}}=\pi/\mathrm{T}=8\pi\times10^3$

2. 解：1. 小题求得的所求重构滤波器 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 是不可能实现的，（1 分）理由如下：

1) $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 的过渡带等于 0，其单位冲激响应 $h_{\mathrm{L}}(t)\neq0$，$t<0$，即它是一个连续时间非因果滤波器；（1 分）

2) 它的相频特性 $\varphi_{\mathrm{L}}(\omega)$ 意味着超前 $T/2$，也无法做到。（1 分）

为了从图 5 所示的平顶抽样信号 $x_{\mathrm{P}}(t)$ 中实现无失真恢复原信号，针对上述两点理由，需要做两个修改：

1) 采用过抽样，给重构滤波器留出保护带，比如抽样率增加到 10 KHz；（2 分）

2) 重构滤波器 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 修改为

$$H_{\mathrm{L}}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{2}{\mathrm{Sa}(\omega T/4)}, & |\omega|<8\pi\times10^3\\ 0, & |\omega|>\pi\times10^4\end{cases},\tag{5-6}$$

在 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 的过渡带（$8\pi\times10^3<|\omega|<\pi\times10^4$）范围内，$H_{\mathrm{L}}(\omega)=$任意，只要可实现就行。这样，$x_{\mathrm{P}}(t)$ 通过(5-6)式的重构滤波器 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 的输出为 $x(t-T/2)$。（3 分）

六、如图 6 的信号流图所示的数字滤波器，试求：（**共 22 分**）

1. 它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，并画出它用一个一阶全通滤波器和一个 4 阶 FIR 滤波器的**级联**实现的方框图或信号流图；（**12 分**）
2. 概画出该数字滤波器的幅频响应 $\left|\tilde{H}(\Omega)\right|$（或 $\left|H(e^{j\Omega})\right|$）。（**10 分**）

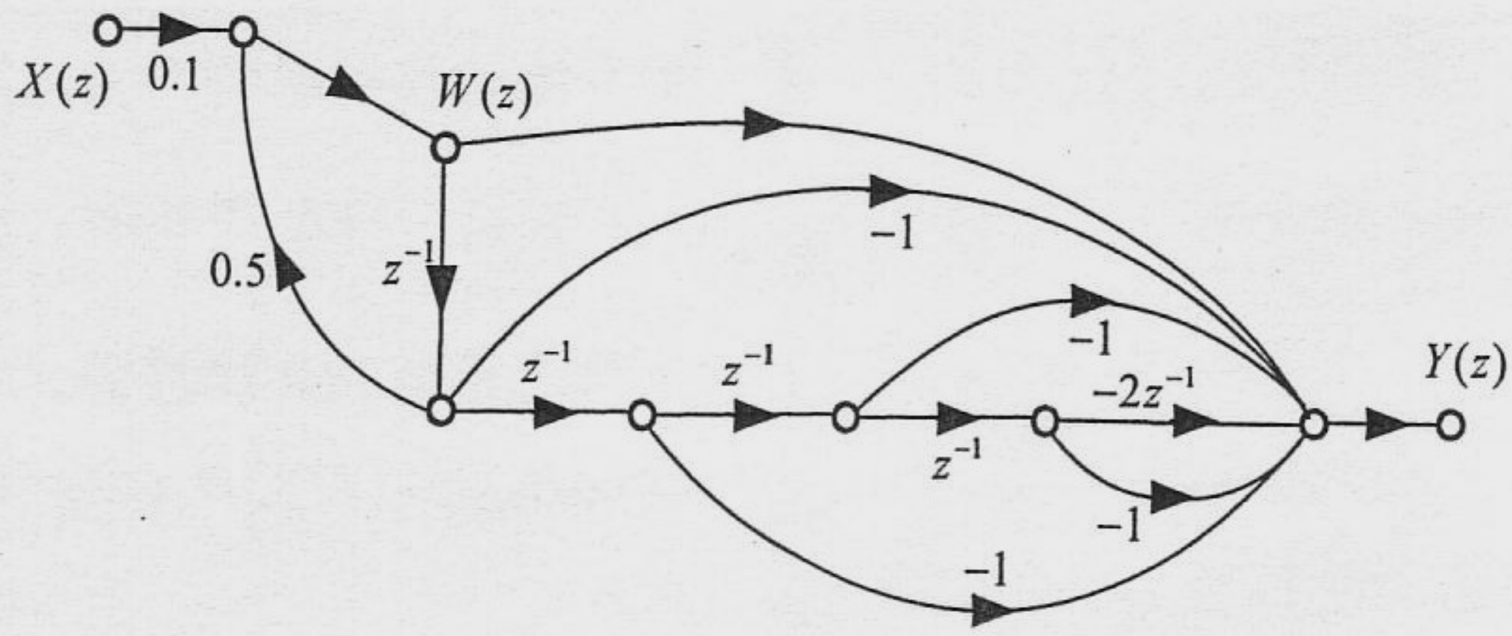


图 6

1. **解：** 图 6 的信号流图表示的数字滤波器输出和输入像函数之间的关系可以写成为

$$Y(z)=W(z)-W(z)z^{-1}-W(z)z^{-2}-W(z)z^{-3}-W(z)z^{-4}-2W(z)z^{-5}\quad（1\text{ 分}）$$

$$W(z)=0.5W(z)z^{-1}+0.1X(z)，（1\text{ 分}）$$

联立上述两式得到

$$Y(z)=\frac{X(z)}{1-0.5z^{-1}}[1-z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}-z^{-4}-2z^{-5}]\quad（1\text{ 分}）$$

该数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}-z^{-4}-2z^{-5}}{10(1-0.5z^{-1})}=\frac{0.1(1-2z^{-1})}{1-0.5z^{-1}}(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})\ (3\text{ 分})\tag{6-1}$$

其中，一阶系统函数 $\dfrac{1-2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$ 是一阶全通函数，$(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})$ 是 4 阶 FIR 滤波器的系统函数，两者相乘即为两个滤波器级联，其级联实现方框图见图 6.1。（6 分）

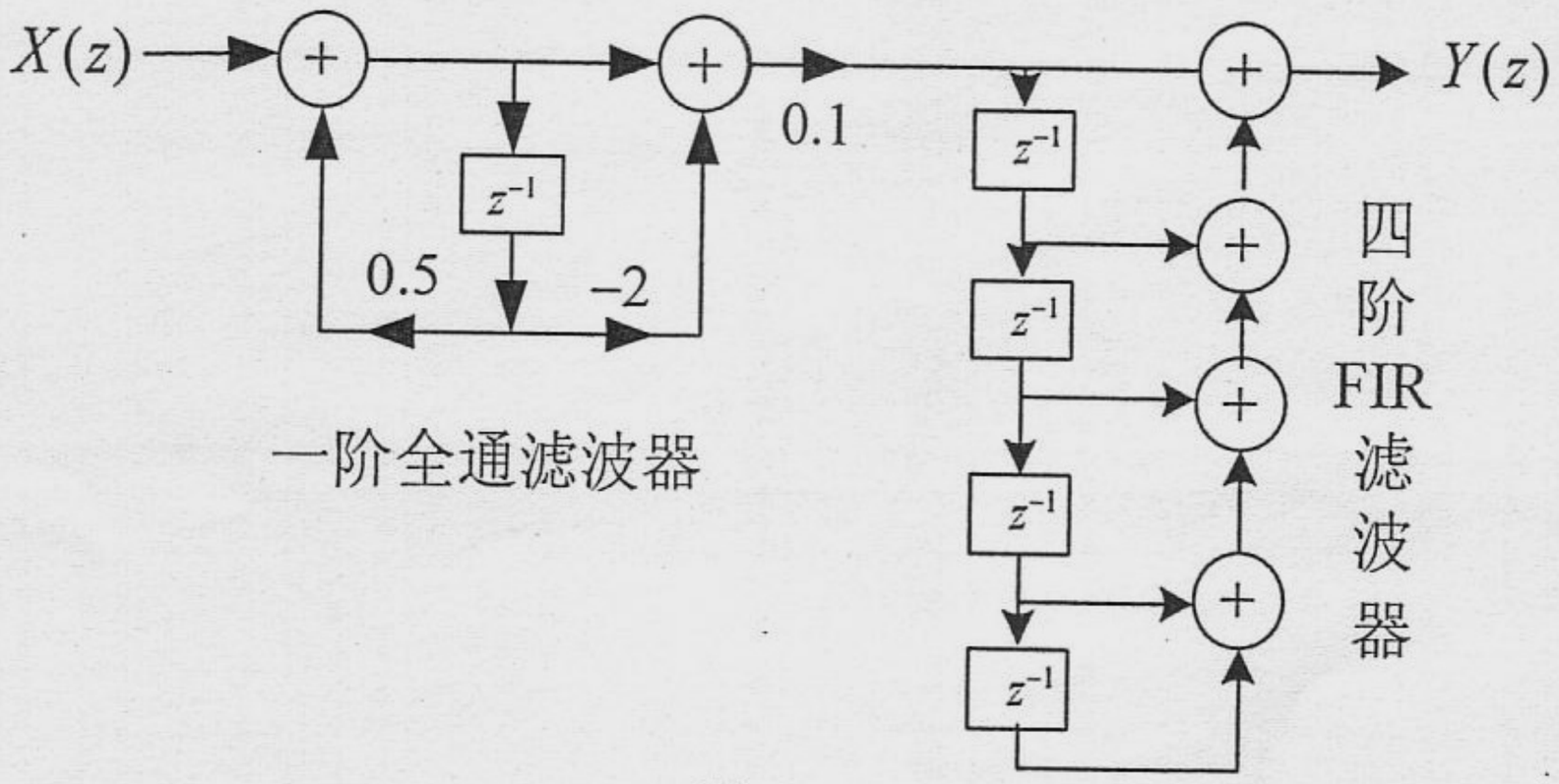


图 6.1

或者，图 6 是直接 II 型实现结构的信号流图，可以直接写出该数字滤波器的差分方程

$$y[n]-0.5y[n-1]=x[n]-x[n-1]-x[n-2]-x[n-3]-x[n-4]-2x[n-5]$$（3 分）

由上述方程写出该数字滤波器的的系统函数 $H(z)$。（见前面(6.1)式）（3 分）

2. 解：由 1.小题求得的(6.1)式可写成

$H(z)=H_0H_1(z)H_2(z)$　和　数字滤波器频率响应 $\tilde{H}(\Omega)=H_0\tilde{H}_1(\Omega)\tilde{H}_2(\Omega)$

其中，$H_0=0.1$；$H_1(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$，它是一阶全通系统，极点 $p=0.5$，零点 $z=2$；

和　　$H_2(z)=(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})$，它是 FIR 滤波器。

该数字滤波器幅频响应为：$\left|\tilde{H}(\Omega)\right|=\left|H_0\right|\left|\tilde{H}_1(\Omega)\right|\left|\tilde{H}_2(\Omega)\right|$（2 分）

其中，$\left|H_0\right|=0.1$；$\left|\tilde{H}_1(\Omega)\right|=2$；（2 分）

FIR 滤波器 $H_2(z)$ 的单位冲激响应 $h_2[n]$ 为

$h_2[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]=u[n]-u[n-5]$（1 分）

$h_2[n]$ 序列图形见图 6.1，它的幅频响应为 $\left|\tilde{H}_2(\Omega)\right|=\left|\dfrac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right|$（见图 6.2）（3 分）

因此，该数字滤波器幅频响应为：$\left|\tilde{H}(\Omega)\right|=0.2\left|\dfrac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right|$（1 分）

$\left|\tilde{H}(\Omega)\right|$ 的图形如图 6.3 所示（1 分）

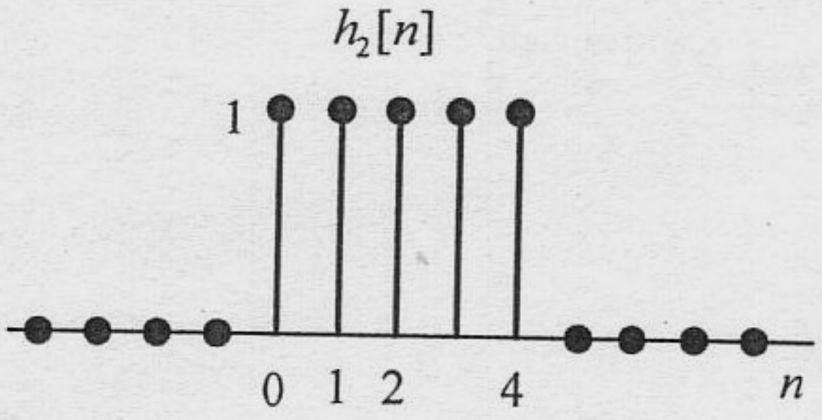


图 6.1

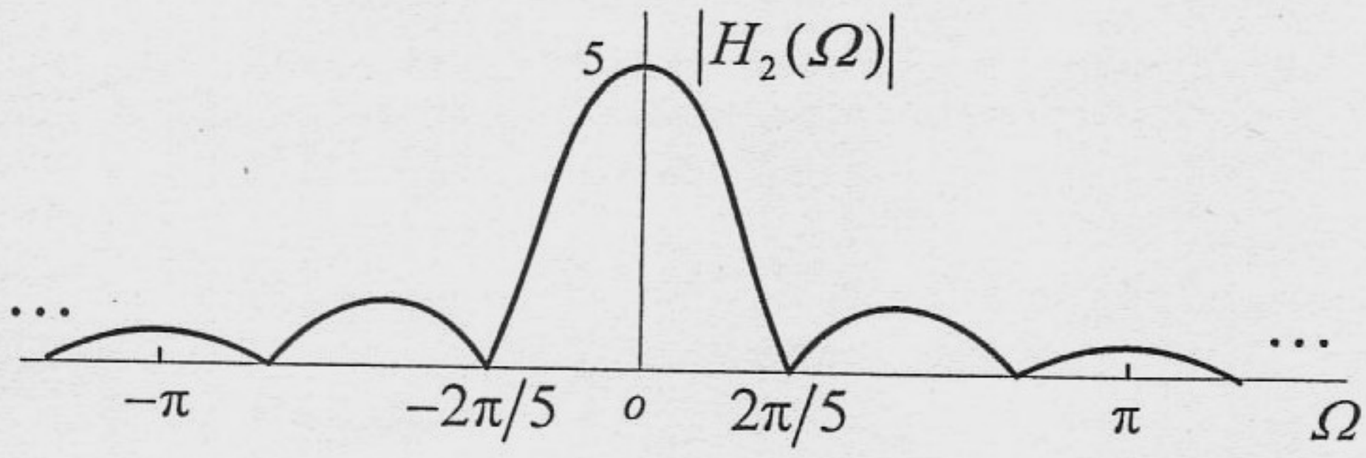


图 6.2

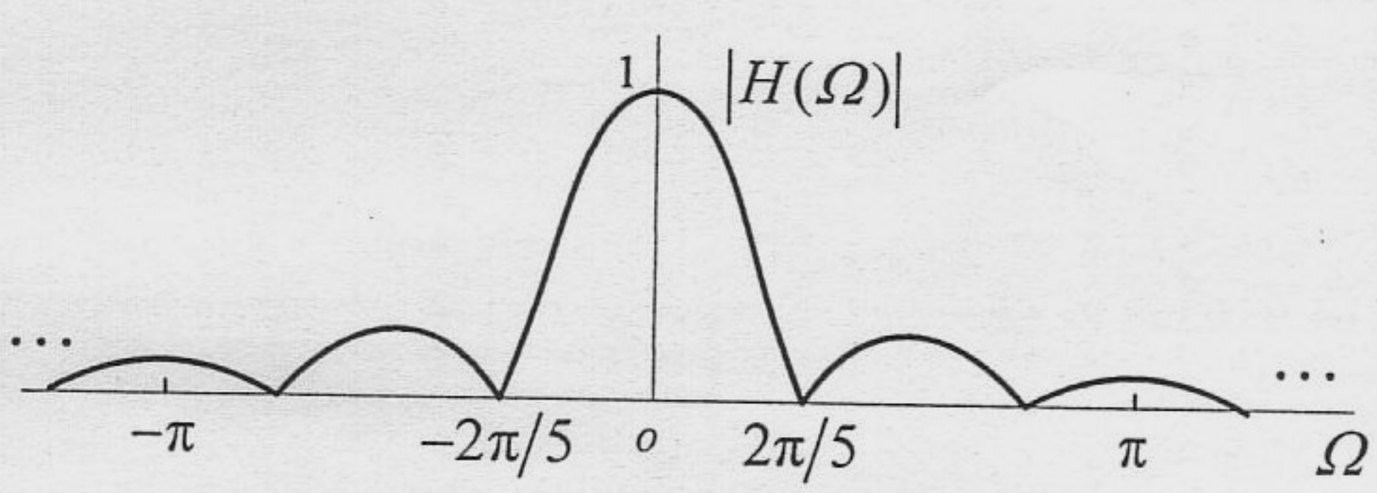


图 6.3

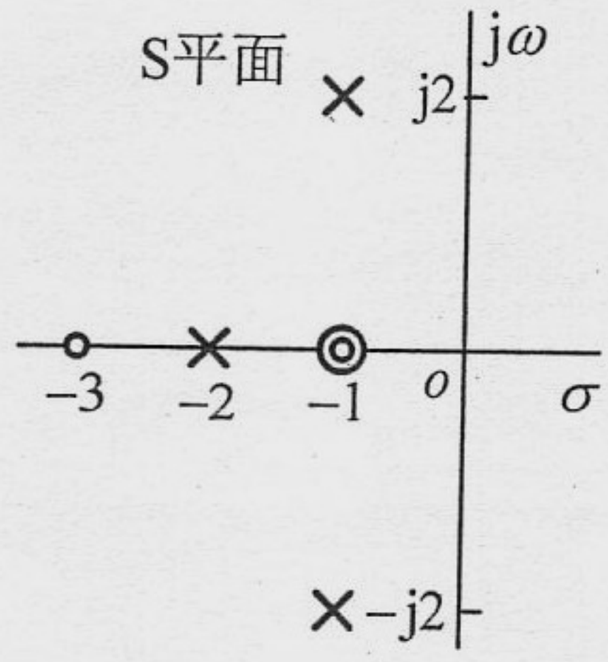


图 7

七、某连续时间实的因果 LTI 系统的零、极点见图 7，并已知 $\int_{0_-}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = 1.5$，其中 $h(t)$ 为该系统的单位冲激响应。试求：（共 24 分）

1. 它是什么类型的系统（全通或最小相移系统），并求 $h(t)$（应为实函数）；（14 分）
2. 写出它的线性实系数微分方程表示；（2 分）
3. 它的逆系统的单位冲激响应 $h_1(t)$，该逆系统可因果稳定实现吗？（8 分）

1. 解：该因果系统为最小相位滤波器，由图 7 的系统零、极点分布，可写出其系统函数为

$$H(s) = H_0 \frac{(s+1)^2(s+3)}{[(s+1)^2+4](s+2)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \text{（4 分）}$$

并由 $\int_{0_-}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = 1.5$ 求出其中的实常数 H_0，即 $H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = 1.5$。代入上式求得　$H_0 = 5$（2 分）。最终得到该系统的系统函数及其收敛域如下

$$H(s) = \frac{5(s^3+5s^2+7s+3)}{s^3+4s^2+9s+10}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \tag{7-1}$$

将上述有理系统函数用长除法和部分分式展开为

$$H(s) = 5 + \frac{5s^2-10s-35}{[(s+1)^2+4](s+2)} = 5 + \frac{1}{s+2} + \frac{4s}{(s+1)^2+2^2} - 10\frac{2}{(s+1)^2+2^2} \text{（4 分）}$$

由于是因果 LTI 系统，其 $h(t) = 0$，$t < 0$，因此，对上述部分分式反拉氏变换求得

$$h(t) = 5\delta(t) + \mathrm{e}^{-2t}u(t) + 4\mathrm{e}^{-t}(\cos 2t)u(t) - 10\mathrm{e}^{-t}(\sin 2t)u(t) \text{（4 分）}$$

2. 解：按照(7-1)式的有理系统函数，可以直接写出该因果 LTI 系统的微分方程如下

$$\frac{\mathrm{d}^3y(t)}{\mathrm{d}t^3} + 4\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 9\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 10y(t) = 5\frac{\mathrm{d}^3x(t)}{\mathrm{d}t^3} + 15\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 35\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 25x(t) \text{（2 分）}$$

3. 解：该系统的逆系统之系统函数 $H_1(s)$ 及其收敛域为

$$H_1(s) = 0.2\frac{s^3+4s^2+9s+10}{(s+1)^2(s+3)} = 0.2\left[1 + \frac{-s^2+2s+7}{(s+1)^2(s+3)}\right], \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \text{（1 分）} \tag{7-2}$$

并进一步可以部分分式展开为

$$H_1(s) = 0.2 + \frac{0.4}{(s+1)^2} + \frac{0.2}{s+1} - \frac{0.4}{s+3}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \text{（3 分）}$$

这是一个因果稳定的系统函数，对上述部分分式进行反拉氏变换求得

$$h_1(t) = 0.2\delta(t) + 0.2\mathrm{e}^{-t}u(t) + 0.4t\mathrm{e}^{-t}u(t) - 0.4\mathrm{e}^{-3t}u(t) \text{（3 分）}$$

因此，该逆系统是既稳定，又可以因果实现。（1 分）

2006年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：　信号与系统

说明：1. 本试卷共六大题，总共150分，答题全部做在考点下发的答题纸上。

2. 请看清每题的要求，特别注意黑体字。若结果是实函数，必须写出实函数表达式；若要求概画出图形的，必须作必要的标注。

一、试求解下列小题：(共6小题，每小题10分，合计60分)

1. 已知一个以微分方程 $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$ 表示的连续时间因果 LTI 系统，当其输入信号为 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 时，试必须用时域方法求该系统的输出 $y(t)$，并概画出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形。

2. 稳定的连续时间 LTI 系统的频率响为 $H(\omega)=\frac{1-e^{-(j\omega+1)}}{j\omega+1}$，试求其单位阶跃响应 $s(t)$；

3. 已知序列值为 2、1、0、1 的 4 点序列 $x[n]$，试计算 8 点序列 $y[n]=\begin{cases}x[n/2], & n=2l\\ 0, & n\neq 2l\end{cases}$（其中 l 为整数）离散傅里叶变换 $Y(k)$，$k=0$，1，2，3，4，5，6，7。

4. 概画出离散时间序列 $x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u[n-4k]$ 的序列图形，并求它的 Z 变换 $X(z)$，以及概画出 $X(z)$ 的零极点图和收敛域。

5. 某个实际测量系统（LTI 系统）的单位阶跃响应 $s(t)=(1-e^{-t/\tau})u(t)$，τ 为系统的时间常数。显然，它不能瞬时响应被测信号的变化。试设计一个补偿系统，使得原测量系统与它级联后的输出信号，能对被测信号作出瞬时的响应，即能准确地表示被测信号。请给出你设计的补偿系统的特性（单位冲激响应或频率响应）。

6. 图 1.6 信号流图所示的数字滤波器，已知有始输入数字信号 $x[n]$ 的序列值依次为 4，1，2，0，−4，2，4 …，试求该数字滤波器输出 $y[n]$ 的前 5 个序列值。

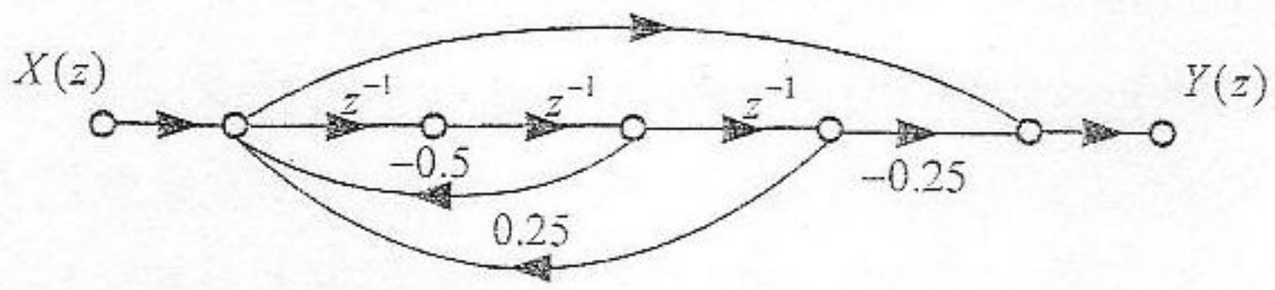


图 1.6

二、已知当输入信号为 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 时，某连续时间因果 LTI 系统的输出信号为 $y(t)=\sin\pi t u(t)+\sin\pi(t-1)u(t-1)$。试求：（每小题 10 分，共 20 分）

1. 该系统的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出 $h(t)$ 的波形；

2. 当该系统输入为 $x_1(t)=u(t)-u(t-1)$ 时的输出信号 $y_1(t)$，并概画出 $y_1(t)$ 的波形。

三、已知由差分方程 $y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-x[n-1]-\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}x[n-k-1]$ 表示的因果数字滤波器（即离散时间因果 LTI 系统），试求：（共 20 分）

1. 该滤波器的系统函数 $H(z)$，并概画出其零极点图和收敛域；（8 分）
2. 该滤波器稳定吗？若稳定，概画出它的幅频响应 $\left|\tilde{H}(\Omega)\right|$ 或 $\left|H(e^{j\Omega})\right|$，并指出它是什么类型的滤波器（低通、高通、带通、全通、最小相移等）；（6 分）
3. 画出它用离散时间三种基本单元构成的级联实现结构的方框图或信号流图；（6 分）

四、已知一个以微分方程 $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t-1)$ 和 $y(0_-)=1$ 的起始条件表示的连续时间因果系统，试求当输入为 $x(t)=(\sin 2t)u(t)$ 时，该系统的输出 $y(t)$，并写出其中的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和零输入响应分量 $y_{zi}(t)$，以及暂态响应和稳态响应分量。（15 分）

五、某因果数字滤波器的零、极点如图 5(a)所示，并已知其 $\tilde{H}(\pi)=-1$。试求：（共 15 分）

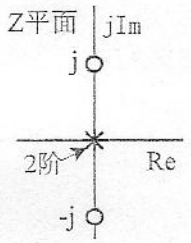


图 5(a)

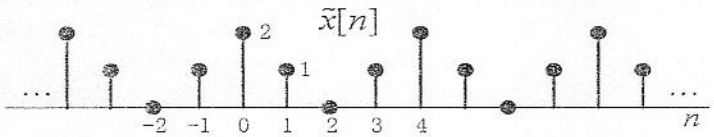


图 5(b)

1. 它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，且回答它是 IIR、还是 FIR 的什么类型(低通、高通、带通、带阻或全通)滤波器？（6 分）
2. 写出图 5(b)所示周期信号 $\tilde{x}[n]$ 的表达式，并求其离散傅里叶级数的系数；（5 分）
3. 该滤波器对周期输入 $\tilde{x}[n]$ 的响应 $y[n]$。（4 分）

六、图 6 所示的连续时间信号抽样传输系统，已知系统的输入信号 $x(t)=\frac{\sin^2(4\pi\times10^3 t)}{\pi^2t^2}$，抽样间隔 $T=0.1$ ms，图 6 中的信道滤波器是一个实的升余弦滚降带通滤波器，其频率响应 $H_{BP}(f)$ 如图 6(a)所示。试求：（共 20 分）

1. $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$，并概画出 $X(\omega)$ 以及 $x_p(t)$、$y(t)$ 的频谱 $X_p(\omega)$、$Y(\omega)$；（12 分）
2. 试设计由系统输出 $y(t)$ 恢复出 $x(t)$ 的系统，画出该恢复系统的方框图，并给出其中所用系统的系统特性（例如，滤波器的频率响应等）。（8 分）

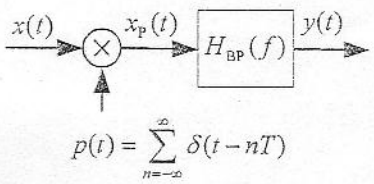


图 6

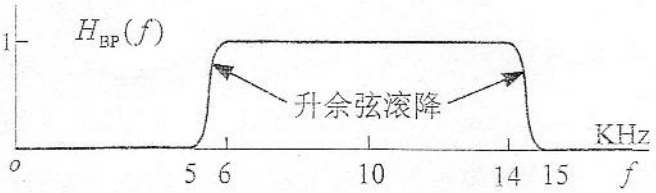


图 6(a)

试题名称： 信号与系统

一、试求解下列小题：(共 6 小题，每小题 **10** 分，合计 60 分)

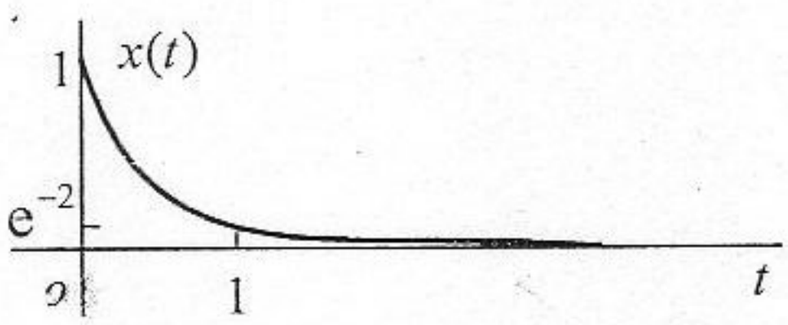
1. 已知一个以微分方程 $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$ 表示的连续时间因果 LTI 系统，当其输入信号为 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 时，试必须用时域方法求该系统的输出 $y(t)$，并概画出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形。

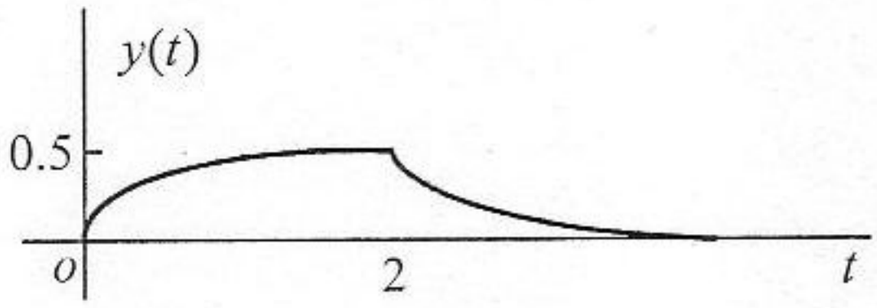
解答： 先依据一阶因果 LTI 系统的微分方程，直接写出其单位冲激响应为 $h(t)=e^{-2t}u(t)$，或通过其系统函数 $H(s)=\frac{1}{s+2}$，$\mathrm{Re}(s)>-2$，反变换求得 $h(t)=e^{-2t}u(t)$。 **（2 分）**

然后，用时域方法、即卷积的方法求系统的输出 $y(t)$ 为

$$y(t)=x(t)*h(t)=e^{-2t}u(t)*[u(t)-u(t-2)]=\frac{1-e^{-2t}}{2}u(t)-\frac{1-e^{-2(t-2)}}{2}u(t-2)$$ **（6 分）**

$x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形概画如下： **（2 分）**





如果本题用变换域方法求出正确结果得一半分（**5** 分）

2. 某稳定的连续时间 LTI 系统的频率响为 $H(\omega)=\frac{1-e^{-(j\omega+1)}}{j\omega+1}$，试求其单位阶跃响应 $s(t)$；

解答：可以用两种不同方法求解：

解法一，先用反傅里叶变换由 $H(\omega)$ 求得系统的单位冲激响应 $h(t)$，再对 $h(t)$ 积分求得系统的单位阶跃响应 $s(t)$，即

$$H(\omega)=\frac{1-e^{-(j\omega+1)}}{j\omega+1}=\frac{1}{j\omega+1}-\frac{e^{-1}}{j\omega+1}e^{-j\omega}$$ **（1 分）**

对上式求反傅里叶变换，得到：$h(t)=e^{-t}u(t)-e^{-1}e^{-(t-1)}u(t-1)$ **（3 分）**

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=h(t)*u(t)=e^{-t}u(t)*u(t)-e^{-1}e^{-(t-1)}u(t-1)*u(t)$$

$$=(1-e^{-t})u(t)-e^{-1}[1-e^{-(t-1)}]u(t-1)$$ **（6 分）**

解法二，先由系统的频率响应 $H(\omega)$ 写出其系统函数及其收敛域，即

$$H(s)=\frac{1-e^{-1}e^{-s}}{s+1},\quad \mathrm{Re}(s)>-1$$ **（1 分）**

那么， $s(t)$ 的拉氏氏变换即为 $S(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-s}}{s(s+1)}$， $\mathrm{Re}(s)>0$ （2 分）

对 $S(s)$ 部分分式展开，即 $S(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-s}}{s(s+1)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s}\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-s}+\dfrac{1}{s+1}\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-s}$

再对 $S(s)$ 进行反拉氏变换，得到系统的单位阶跃响应 $s(t)$，即

$$s(t)=(1-\mathrm{e}^{-t})u(t)-\mathrm{e}^{-1}[1-\mathrm{e}^{-(t-1)}]u(t-1)$$ （7 分）

3. 已知序列值为 2、1、0、1 的 4 点序列 $x[n]$，试计算 8 点序列 $y[n]=\begin{cases}x[n/2], & n=2l\\ 0, & n\neq 2l\end{cases}$（其中 l 为整数）离散傅里叶变换 $Y(k)$， $k=0$，1，2，3， 4， 5， 6， 7。

解答：先用 DFT 公式，或 4 点 DFT 的矩阵计算式，即

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}nk}=\sum_{n=0}^{3}x[n](-\mathrm{j})^{nk}=2+(-\mathrm{j})^{k}+(-\mathrm{j})^{3k},\qquad k=0、1、2、3$$ （3 分）

或者，
$$\begin{bmatrix}X(0)\\ X(1)\\ X(2)\\ X[3]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j}\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$ （或 3 分）

求得 $x[n]$ 的 4 点 DFT 为： $X(0)=4$， $X(1)=2$， $X(2)=0$， $X[3]=2$ （2 分）

由于 $y[n]=\begin{cases}x[n/2], & n=2l\\ 0, & n\neq 2l\end{cases}=x_{(2)}[n]$，因此， $\tilde{Y}(\Omega)=\tilde{X}(2\Omega)$，其中 $\tilde{Y}(\Omega)$ 和 $\tilde{X}(\Omega)$ 分别是 $y[n]$ 和 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换（DTFT），再依据 DFT 与 DTFT 之间的关系，可以求得 $y[n]$ 的 8 点 DFT 为

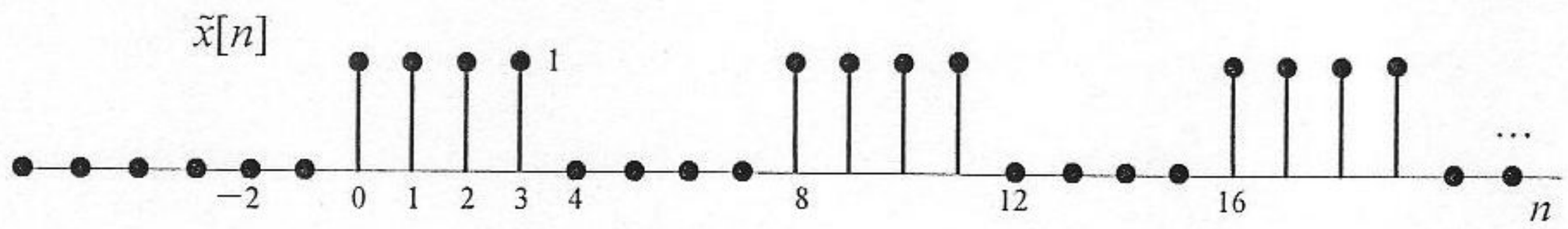
$Y(0)=X(0)=4$， $Y(1)=X(1)=2$， $Y(2)=X(2)=0$， $Y(3)=X(3)=2$

$Y(4)=X(0)=4$， $Y(5)=X(1)=2$， $Y(6)=X(2)=0$， $Y(7)=X(3)=2$ （5 分）

本题也可以先求出 8 点序列 $y[n]$ 的序列值，然后求其 8 点 DFT。

4. 概画出离散时间序列 $x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}u[n-4k]$ 的序列图形，并求它的 Z 变换 $X(z)$，以及概画出 $X(z)$ 的零极点图和收敛域。

解答： $x[n]$ 的序列图形为： （2 分）



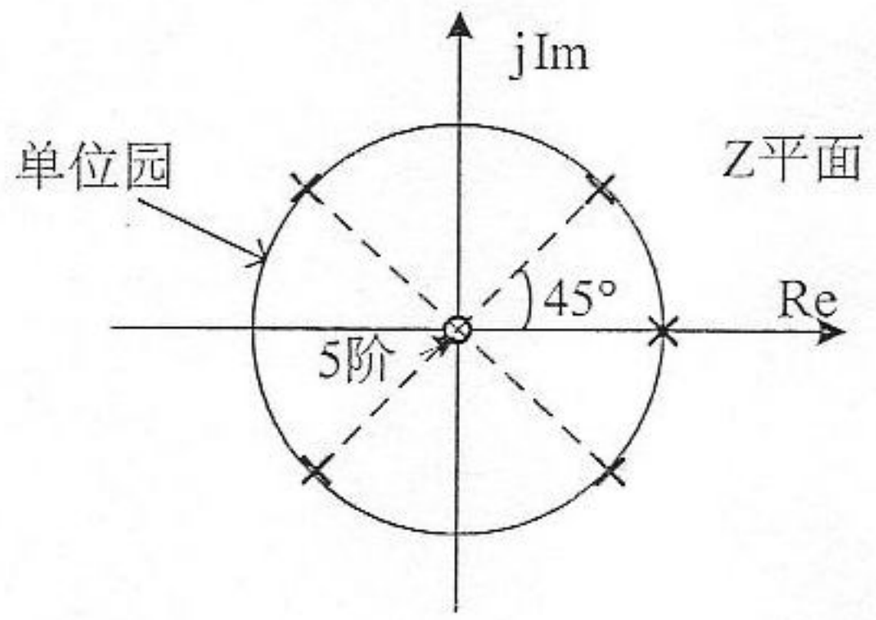
由上图， $x[n]$ 可改写为

$x[n]=(u[n]-u[n-4])*\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-8k]$，其 Z 变换 $X(z)$ 为

$X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}(1-z^{-4})\dfrac{1}{1-z^{-8}}=\dfrac{1}{(1-z^{-1})(1+z^{-4})}$，收敛域为：$|z|>1$。　　（6 分）

或者，直接对 $x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u[n-4k]$ 求 Z 变换，得到

$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{z^{-4k}}{1-z^{-1}}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-z^{-4})^k=\dfrac{1}{(1-z^{-1})(1+z^{-4})}$，$|z|>1$　　（或 6 分）



$X(z)$得零极点右下图所示。（2 分）

5. 某个实际测量系统（LTI 系统）的单位阶跃响应 $s(t)=(1-e^{-t/\tau})u(t)$，τ 为系统的时间常数。显然，它不能瞬时响应被测信号的变化。试设计一个补偿系统，使得原测量系统与它级联后的输出信号，能对被测信号作出瞬时的响应，即能准确地表示被测信号。请给出你设计的补偿系统的特性（单位冲激响应或频率响应）。

解答：根据题意，要设计的补偿系统就是该实际测量系统（因果 LTI 系统）的逆系统。为此，先求该实际测量系统的系统函数 $H(s)$，它的 $s(t)$ 的拉氏变换 $S(s)$ 为

$S(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+(1/\tau)}=\dfrac{1/\tau}{s[s+(1/\tau)]}$，　　$\mathrm{Re}(s)>0$　　（2 分）

该实际测量系统的系统函数为：$H(s)=s\times S(s)=\dfrac{1/\tau}{s+(1/\tau)}$，　　$\mathrm{Re}(s)>-\dfrac{1}{\tau}$　　（2 分）

要求的补偿系统的系统函数为：$H_1(s)=\tau[s+(1/\tau)]$，收敛域为有限 S 平面。（4 分）

其频率响应为：$H_1(\omega)=\tau[j\omega+(1/\tau)]$，或单位冲激响应为：$h_1(t)=\delta(t)+\tau\delta'(t)$　（2 分）

6. 图 1.6 信号流图所示的数字滤波器，已知有始输入数字信号 $x[n]$ 的序列值依次为 4，1，2，0，－4，2，4 •••，试求该数字滤波器输出 $y[n]$ 的前 5 个序列值。

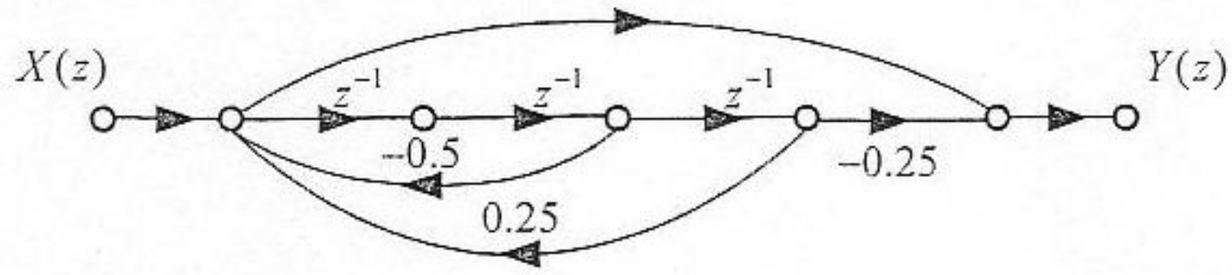


图 1.6

解答：先写出该因果数字滤波器的系统函数，再由此写出其差分方程表示，然后，利用差分方程的后推算法，逐个计算出已知有始输入 $x[n]$ 时的滤波器输出的前 5 个序列值。

该因果数字滤波器的系统函数为：$H(z)=\dfrac{1-0.25z^{-3}}{1+0.5z^{-2}-0.25z^{-3}}$　　（3 分）

该因果数字滤波器的系统函数差分方程为：

$$y[n]+0.5y[n-2]-0.25y[n-3]=x[n]-0.25x[n-3]$$　　（1 分）

其后推方程为：$y[n]=x[n]-0.25x[n-3]-0.5y[n-2]+0.25y[n-3]$　　（1 分）

代入已知的有始输入 $x[n]$ 的序列值，且假定起始时刻为 0 时刻，求得 $y[n]$ 的前 5 个序列值分别为：

$$y[0]=4,\quad y[1]=1,\quad y[2]=2-0.5\times4=0$$

$$y[3]=0-0.25\times4-0.5\times1+0.25\times4=-0.5$$

$$y[4]=-4-0.25\times1-0.5\times0+0.25\times1=-4$$　　（5 分）

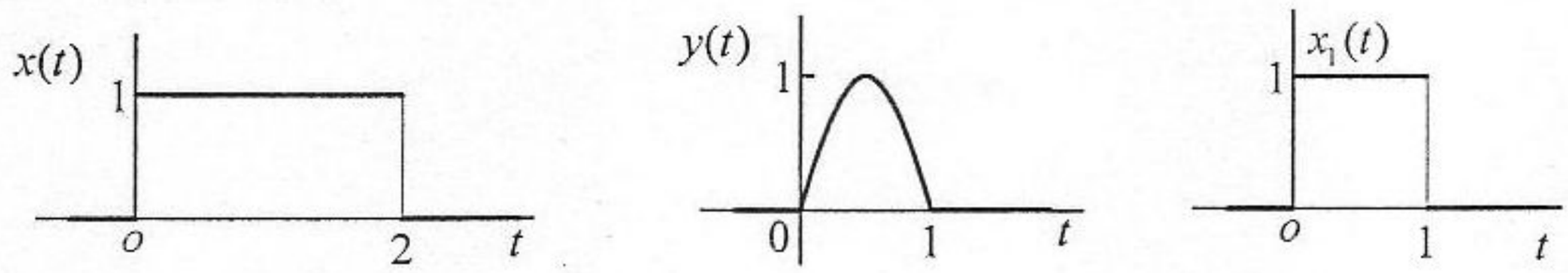
由于系统是因果 LTI 系统，所以对于输入可以认为是从 0 开始，也可以认为是从大于 0 的某个时刻开始，但是，前 5 个序列值应该是不变的。

二、已知当输入信号为 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 时，某连续时间因果 LTI 系统的输出信号为 $y(t)=\sin\pi t u(t)+\sin\pi(t-1)u(t-1)$。试求：（每小题 10 分，共 20 分）

1. 该系统的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出 $h(t)$ 的波形；

2. 当该系统输入为 $x_1(t)=u(t)-u(t-1)$ 时的输出信号 $y_1(t)$，并概画出 $y_1(t)$ 的波形。

解答： $x(t)$、$y(t)$ 和 $x_1(t)$ 的波形如下图所示。



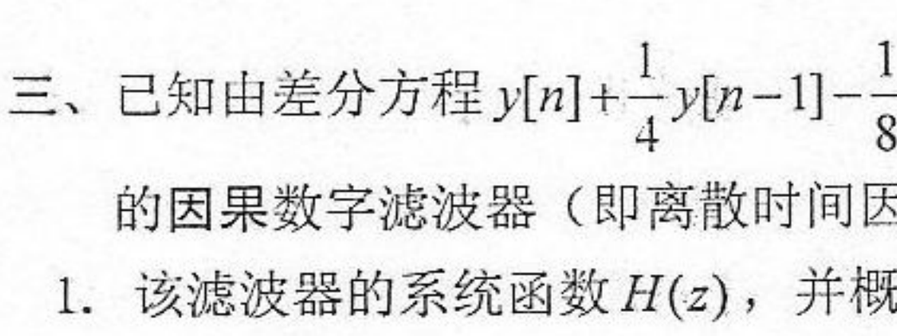
1. 先求系统的单位阶跃响应 $s(t)$，再对 $s(t)$ 微分得到其单位冲激响应 $h(t)$。

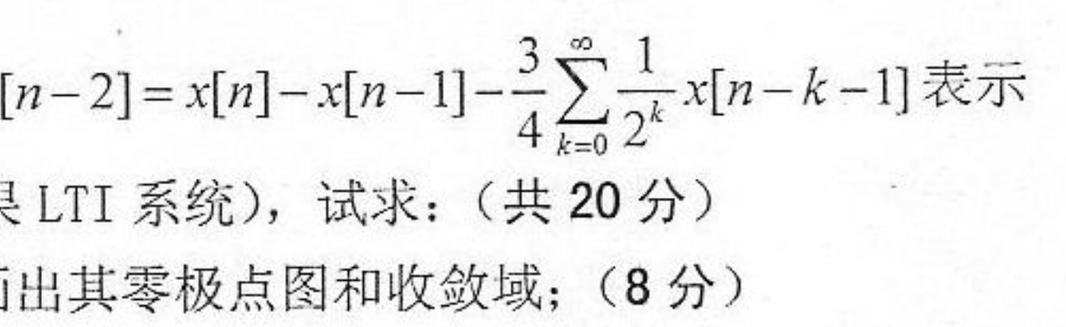
由上图的 $x(t)$ 可得 $u(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(t-2k)$，根据 LTI 系统的性质，对应输出 $s(t)$ 为：

$$s(t)=\sum_{k=0}^{\infty}y(t-2k)=\sum_{k=0}^{\infty}\sin\pi(t-k)u(t-k)$$ （6 分）

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=0}^{\infty}\pi\cos[\pi(t-k)]u(t-k)$$ （3 分）

$h(t)$ 的波形如左下图所示：（1 分）





说明：本小题也可以用拉氏变换方法做，得到同样结果。

2. 根据上面 $x_1(t)$ 和 $x(t)$ 的波形，$x_1(t)$ 可以写成 $x(t)$ 的如下时移线性组合：

$$x_1(t)=x(t)-x(t-1)+x(t-2)-x(t-3)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x(t-k)$$ （3 分）

利用 LTI 系统的性质，相应输出 $y_1(t)$ 应该为：$y_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y(t-k)$ （6 分）

$y_1(t)$ 波形如右上图所示。（1 分）

说明：本小题也可以用拉氏变换方法做，得到同样结果。

三、已知由差分方程 $y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-x[n-1]-\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}x[n-k-1]$ 表示的因果数字滤波器（即离散时间因果 LTI 系统），试求：（共 20 分）

1. 该滤波器的系统函数 $H(z)$，并概画出其零极点图和收敛域；（8 分）
2. 该滤波器稳定吗？若稳定，概画出它的幅频响应 $\left|\tilde{H}(\Omega)\right|$ 或 $\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right|$，并指出它是什么类型的滤波器（低通、高通、带通、全通、最小相移等）；（6 分）
3. 画出它用离散时间三种基本单元构成的级联实现结构的方框图或信号流图；（6 分）

解答：

1. 差分方程可以写成：

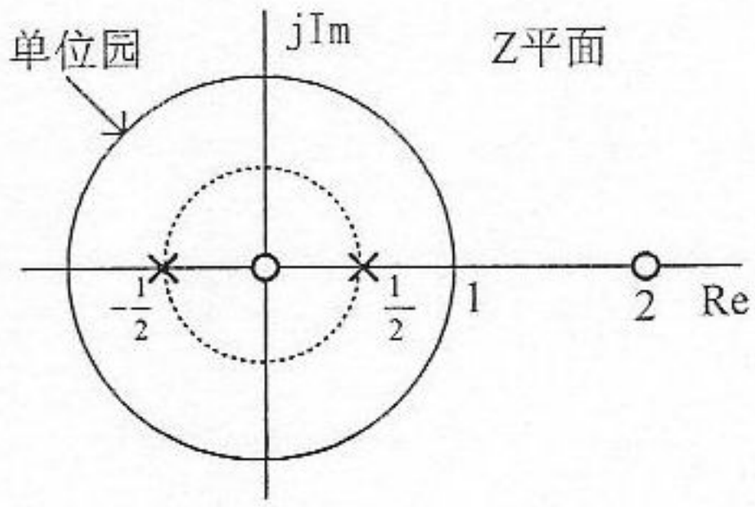
$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-x[n-1]-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]*x[n-k-1]$$ （2 分）

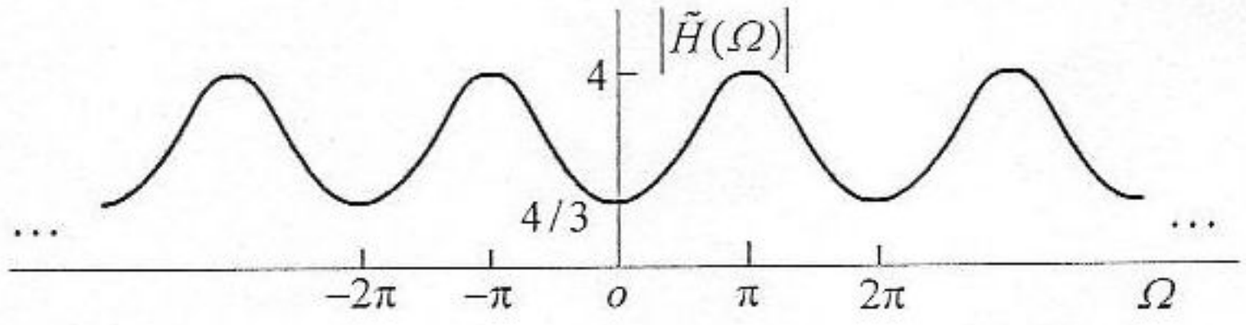
对上面方程两边取 Z 变换，得到

$$\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}\right)Y(z)=\left(1-z^{-1}-\frac{\frac{3}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)X(z)$$

则有：$H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1-2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$，收敛域为：$|z|>\dfrac{1}{2}$　（5 分）

其零极点如左下图所示。（1 分）





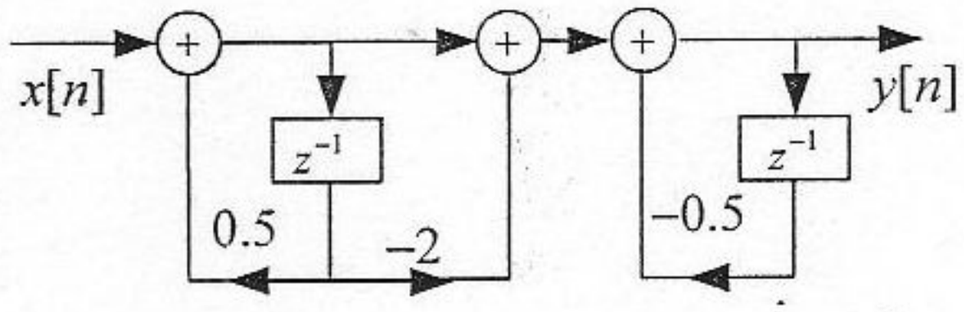
2. 因为收敛域包含单位圆，该滤波器稳定。　（1 分）

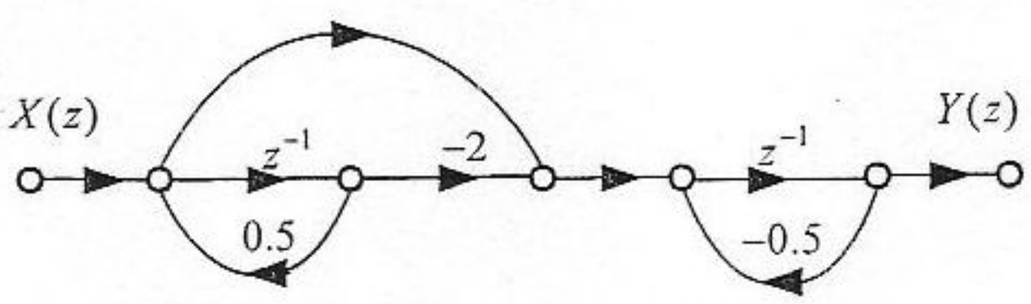
该系统相当于一个一阶全通滤波器 $H_{1AP}(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ 与一个一阶高通滤波器

$H_2(z)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ 的级联，因此，它是一个高通滤波器。　（2 分）

它的幅频响应为 $|\tilde{H}(\Omega)|=\tilde{H}_{1AP}(\Omega)\tilde{H}_2(\Omega)=2\left|\dfrac{1}{1+e^{-j\Omega}}\right|$，其图形如右上图所示。（3 分）

3. 该系统的级联实现结构的方框图或信号流图如下：　（6 分）





四、已知一个以微分方程 $\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t-1)$ 和 $y(0_-)=1$ 的起始条件表示的连续时间因果系统，试求当输入为 $x(t)=(\sin 2t)u(t)$ 时，该系统的输出 $y(t)$，并写出其中的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和零输入响应分量 $y_{zi}(t)$，以及暂态响应和稳态响应分量。（15 分）

解答：先求零输入响应 $y_{zi}(t)$，它满足的方程和起始条件为

$$\frac{dy_{zi}(t)}{dt}+2y_{zi}(t)=0,\quad y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$$

对上式用单边拉氏变换，求得 $y_{zi}(t)$ 的像函数为 $Y_{uzi}(s)=\dfrac{1}{s+2}$。

经过单边反拉氏变换，得到零输入响应为：$y_{zi}(t)=e^{-2t}$，$t\geq 0$　（4 分）

再求零状态响应 $y_{zs}(t)$，对它而言，系统就成为如下微分方程表示的因果 LTI 系统：

$$\frac{\mathrm{d}y_{zs}(t)}{\mathrm{d}t}+2y_{zs}(t)=x(t)*\delta(t-1) \qquad (1\text{ 分})$$

对上式取拉氏变换或单边拉氏变换，并代入 $x(t)=(\sin 2t)u(t)$ 的拉氏变换像函数 $X(s)=\dfrac{2}{s^2+4}$，求得零状态响应 $y_{zs}(t)$ 的拉氏变换像函数为：

$$Y_{zs}(s)=\frac{2}{(s+2)(s^2+4)}\mathrm{e}^{-s}$$

利用上式中有理函数的部分分式展开，即 $\dfrac{2}{(s+2)(s^2+4)}=\dfrac{0.5}{s^2+4}-\dfrac{0.25s}{s^2+4}+\dfrac{0.25}{s+2}$，

得到：$Y_{zs}(s)=\left(\dfrac{0.5}{s^2+4}-\dfrac{0.25s}{s^2+4}+\dfrac{0.25}{s+2}\right)\mathrm{e}^{-s}$

最后，反拉氏变换求得零状态响应 $y_{zs}(t)$，即

$$y_{zs}(t)=\frac{1}{4}[\sin 2(t-1)]u(t-1)-\frac{1}{4}[\cos 2(t-1)]u(t-1)+\frac{1}{4}e^{-2(t-1)}u(t-1) \qquad (9\text{ 分})$$

系统全响应 $y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)$ 为：

$$y(t)=0.25\{[\sin 2(t-1)]u(t-1)-[\cos 2(t-1)]u(t-1)+\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1)\}+\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

其中，暂态响应 $y_{暂态}(t)$ 和稳态响应 $y_{稳态}(t)$ 分别为：

$$y_{暂态}(t)=0.25\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1)+\mathrm{e}^{-2t}u(t) \qquad (1\text{ 分})$$

$$y_{稳态}(t)=0.25\{[\sin 2(t-1)]u(t-1)-[\cos 2(t-1)]u(t-1)\} \qquad (1\text{ 分})$$

五、某因果数字滤波器的零、极点如图 5(a)所示，并已知其 $\tilde{H}(\pi)=-1$。试求：（共 15 分）

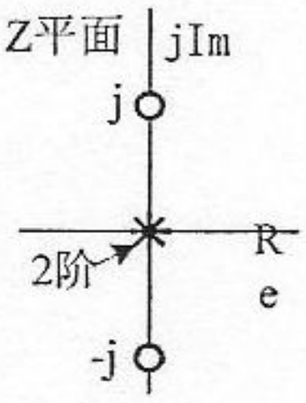


图 5(a)

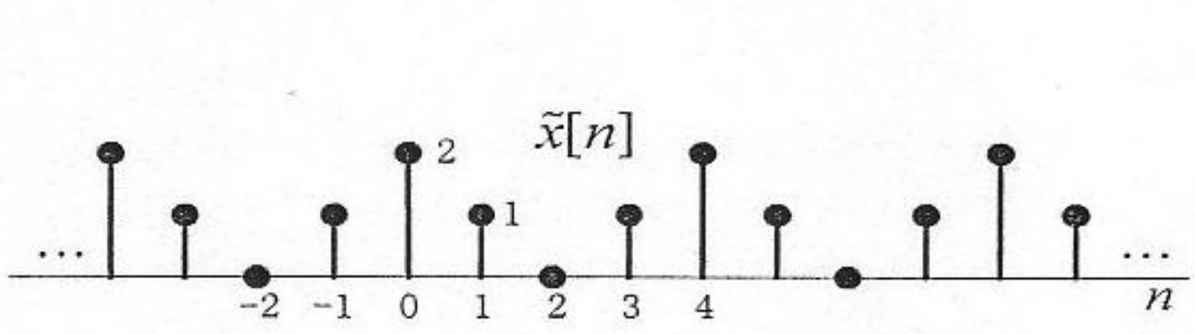


图 5(b)

1. 它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，且回答它是 IIR、还是 FIR 的什么类型(低通、高通、带通、带阻或全通)滤波器？（6 分）
2. 写出图 5(b)所示周期信号 $\tilde{x}[n]$ 的表达式，并求其离散傅里叶级数的系数；（5 分）
3. 该滤波器对周期输入 $\tilde{x}[n]$ 的响应 $y[n]$。（4 分）

解答：

1. 由该因果滤波器的零极点图，可以写出它的系统函数为：

$H(z)=H_0(1+z^{-2})$，$|z|>0$，其中，H_0 为常数，它可由已知的 $\tilde{H}(\pi)=-1$ 求得，即 $\tilde{H}(\pi)=H_0(1+e^{-j2\pi})=2H_0=-1$，求得 $H_0=-0.5$。因此，滤波器的系统函数为：

$H(z)=-0.5(1+z^{-2})$，$|z|>0$　　（4 分）

该滤波器是 FIR 滤波器，且是带阻滤波器。　　（2 分）

2. 周期为 4 的周期信号 $\tilde{x}[n]$ 的表达式为：

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{2\delta[n-4k]+\delta[n-4k-1]+\delta[n-4k-3]\}$$　　（1 分）

可以用两种方法求得 $\tilde{x}[n]$ 的离散傅里叶级数的系数 $\tilde{X}_k$：

一种方法：周期为 4 的 $\tilde{x}[n]$ 也可以写成：$\tilde{x}[n]=1+\cos(\frac{\pi}{2}n)=1+\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{4}n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{4}3n}$

因此，它的离散傅里叶级数系数也是周期为 4 的系数序列 $\tilde{X}_k$，其一个周期内的系数分别为：

$\tilde{X}[0]=1,\ \tilde{X}[1]=0.5,\ \tilde{X}[2]=0,\ \tilde{X}[3]=0.5$　　（4 分）

另一种方法是直接用周期为 4 的离散傅里叶级数分析公式计算，即

$\tilde{X}_k=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-jk(2\pi/4)n}=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-jk(\pi/2)n}$，得到同样的结果。　　（或 4 分）

3. 由该滤波器零极点图可知：在频率 $\Omega=\pi/2$ 和 $\Omega=3\pi/2$ 处，频率响应为零，即 $\tilde{H}(\pi/2)=\tilde{H}(3\pi/2)=0$；而在频率 $\Omega=0$ 处，频率响应为 $\tilde{H}(0)=-1$，因此，滤波器当 $\tilde{x}[n]$ 输入时的输出 $y[n]$ 只有直流分量，即 $y[n]=-1$　　（4 分）

六、图 6 所示的连续时间信号抽样传输系统，已知系统的输入信号 $x(t)=\frac{\sin^2(4\pi\times10^3t)}{\pi^2t^2}$，抽样间隔 $T=0.1$ ms，图 6 中的信道滤波器是一个实的升余弦滚降带通滤波器，其频率响应 $H_{BP}(f)$ 如图 6(a)所示。试求：（共 20 分）

1. $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$，并概画出 $X(\omega)$ 以及 $x_p(t)$、$y(t)$ 的频谱 $X_p(\omega)$、$Y(\omega)$；（12 分）
2. 试设计由系统输出 $y(t)$ 恢复出 $x(t)$ 的系统，画出该恢复系统的方框图，并给出其中所用系统的系统特性（例如，滤波器的频率响应等）。（8 分）

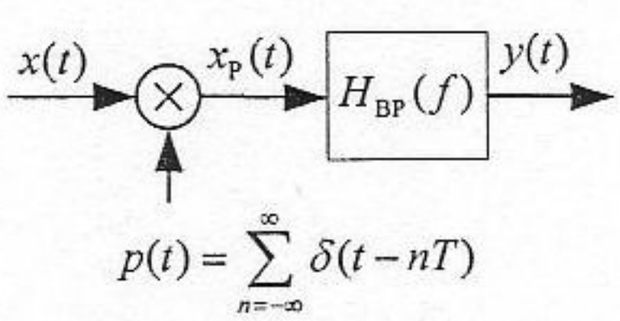


图 6

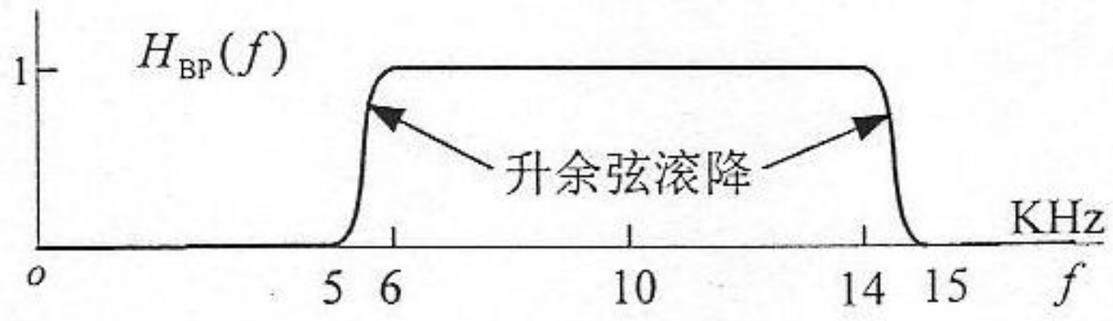


图 6(a)

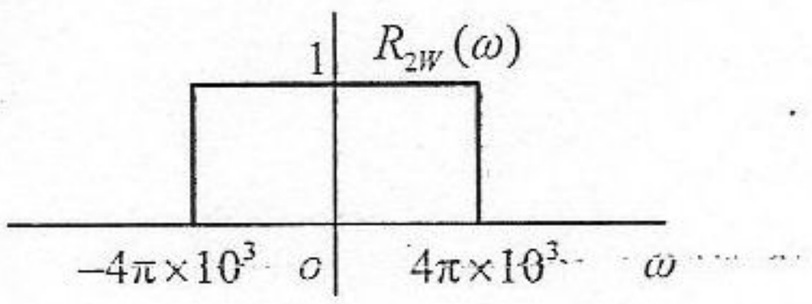
解答：

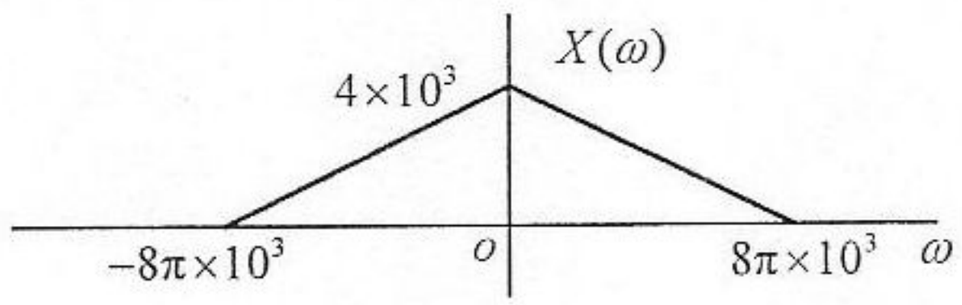
1. 输入信号 $x(t)=\dfrac{\sin^2(4\pi\times10^3t)}{\pi^2t^2}=\dfrac{\sin(4\pi\times10^3t)}{\pi t}\times\dfrac{\sin(4\pi\times10^3t)}{\pi t}$，

由于 $\dfrac{\sin(4\pi\times10^3t)}{\pi t}\xleftrightarrow{\text{CFT}}R_{2W}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<2\times10^3\\ 0, & |\omega|>2\times10^3\end{cases}$（如左下图所示） （3 分）

利用傅里叶变换的频域卷积性质，可求得 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$ 为

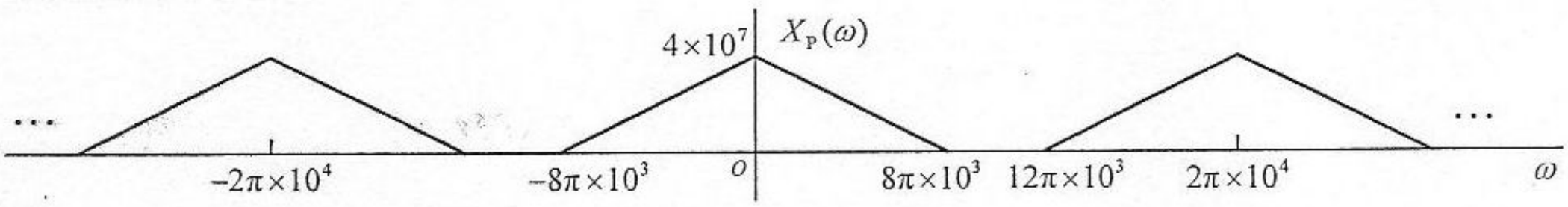
$X(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}R_{2W}(\omega)*R_{2W}(\omega)$，频谱图形如右下狱所示。 （3 分）



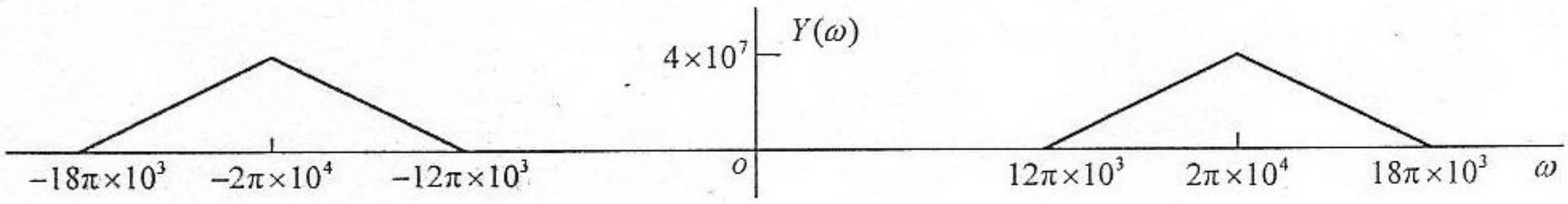


由于抽样间隔 $T=10^{-4}$ $x_P(t)$ 的频谱 $X_P(\omega)=\dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\times2\pi\times10^4)$，

其图形如下： （3 分）



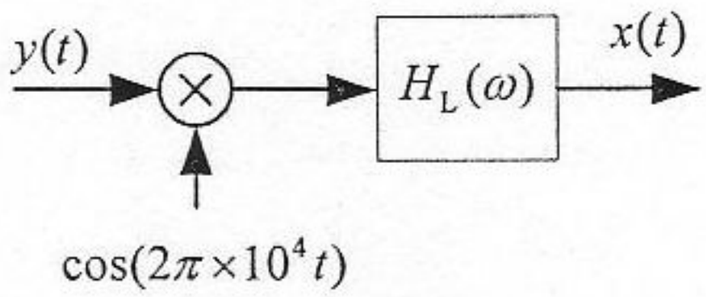
$y(t)$ 的频谱 $Y(\omega)=X_P(\omega)H_{BP}(\omega)$，其频谱图形如下 （3 分）

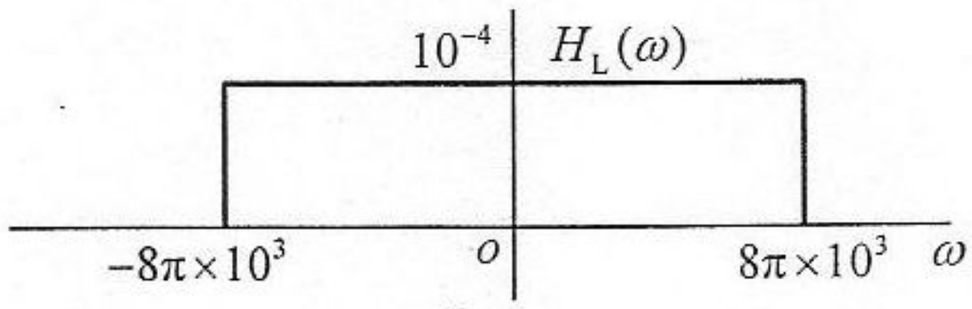


2. 由上图看出 $y(t)$ 的频谱 $Y(\omega)$ 是 $x(t)$ 正弦调制后的频谱，它可以写成

$Y(\omega)=2\times10^4\dfrac{1}{2\pi}X(\omega)*\pi[\delta(\omega+2\pi\times10^4)+\delta(\omega-2\pi\times10^4)]$ （2 分）

因此，可用正弦调制的相干解调恢复出 $x(t)$，这个恢复系统的方框图如左下图所示，其中的 $H_L(\omega)$ 是一个理想低通滤波器，其滤波特性如右下图所示。 （6 分）





所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

说明：1. 本试卷共三大题，均为分析和计算题，总共 150 分。

2. 请看清每题的要求，特别注意黑体字。若结果是实函数，必须写出实函数表达式；按题意要求画出的函数图形，必须有必要的坐标标注。

一、求解下列各小题（每小题 14 分，共 84 分）

1. 已知数字信号 $x[n]$ 和 $v[n]$ 如下表所示，试求它们在区间 $-4 \le n \le 7$ 内的互相关函数 $R_{xv}[n]$。

n	$n<0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$n>9$
$x[n]$	0	1	−1	1	1	1	−1	−1	1	−1	1	0
$v[n]$	0	1	1	1	−1	−1	1	−1	0	0	0	0

2. 已知单位阶跃响应为 $s(t)=0.5\pi[tu(t)-(t-2)u(t-2)-(t-4)u(t-4)+(t-6)u(t-6)]$ 的连续时间 LTI 系统和输入信号 $x(t)=\sin \pi t u(t)-\sin \pi(t-2)u(t-2)$，试分别概画出 $x(t)$ 和 $s(t)$ 的波形，并求出该系统对输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$，且概画出 $y(t)$ 的波形。

3. 现成可用的 FFT 程序都是为计算复序列的 DFT 设计的，试画出只使用一次 N 点 FFT 程序，能同时计算出两个 N 点实序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 N 点 DFT $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 的计算流程图(图中只允许有一个计算 N 点 DFT 的方框)。

4. 一个具有升余弦特性的带通滤波器的频率响应 $H(\omega)$ 如图 1.4 所示，试求其单位冲激响应 $h(t)$，并概画出 $h(t)$ 的波形，该滤波器因果吗？

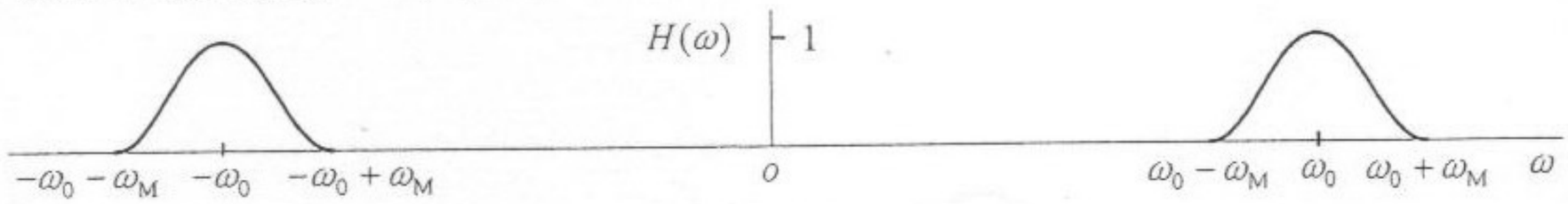


图 1.4

5. 已知离散时间 LTI 系统的单位冲激响应为 $h[n]=\dfrac{\sin(\pi n/4)\sin(\pi n/8)}{\pi n^2}$，它是什么类型（低通、高通、带通等）的滤波器，并求当系统输入为如下的 $x[n]$ 时，系统的输出信号 $y[n]$。

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-2k]e^{jk\pi}+\sum_{k=0}^{2}2^{-k}\cos(2\pi kn/5)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{17\pi n}{8}-\frac{\pi}{3}\right)$$

6. 某连续时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)=tu(t)-2(t-2)u(t-2)+(t-4)u(t-4)$，它的输入是周期信号 $\tilde{x}(t)$，并已知 $\tilde{x}(t)$ 的单边拉普拉斯变换为 $[s(1+e^{-s})]^{-1}$，试求系统的输出 $y(t)$。

二、求解下列 2 小题（每小题 13 分，共 26 分）

1. 某因果数字滤波器由如下差分方程和零起始条件表示，试求它的系统函数，画出其零、极点图和收敛域，它是 FIR 还是 IIR 滤波器？并画出它用三种基本数字单元构成的并联结构的信号流图。

$$y[n]+0.25y[n-1]-0.125y[n-2]=(0.5)^n\sum_{k=-\infty}^{n}2^k x[k]$$

2. 试求用相同差分方程和起始条件 $y[-1]=2/9$、$y[-2]=-4/3$ 表示的离散时间因果系统，在输入 $x[n]=u[n]$ 时的零输入响应 $y_{zi}[n]$ 和零状态响应 $y_{zs}[n]$，并分别写出其稳态响应和暂态响应。

三、综合分析题（每小题 20 分，共 40 分）

1. 某连续时间 LTI 系统如图 3.1 所示，图中的**系统 5** 是图 3.2 所示的 RC 微分电路，它的时间常数 $\tau = RC = 10$ **μs**（微秒）；并已知：

$$h_1(t)=\frac{\sin 10\pi t}{\pi t},\quad H_2(\omega)=\begin{cases}e^{-j0.2\omega}, & |\omega|<10\pi\\ 0, & |\omega|>10\pi\end{cases},\quad h_3(t)=\begin{cases}1/\pi t, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases},\quad H_4(\omega)=\begin{cases}-j, & \omega>0\\ j, & \omega<0\end{cases}$$

试求图 3.1 所示整个系统的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出它的波形。

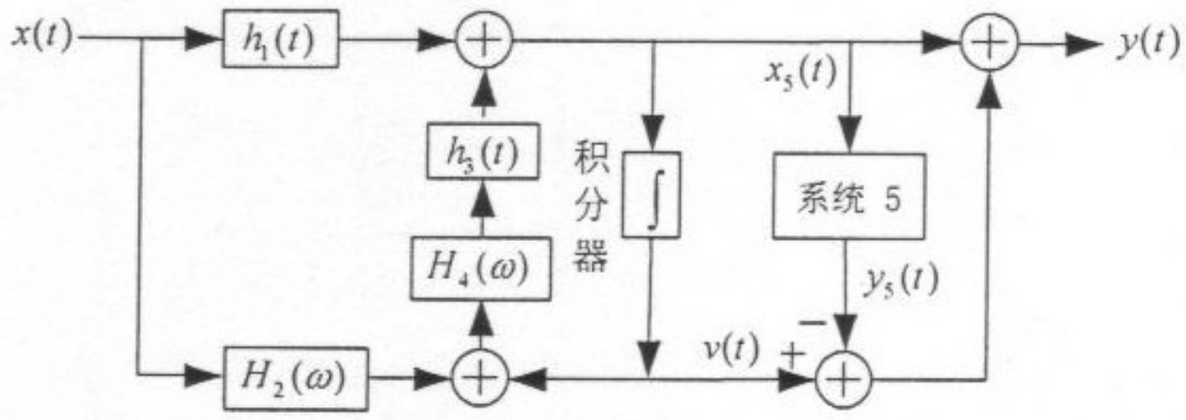


图 3.1

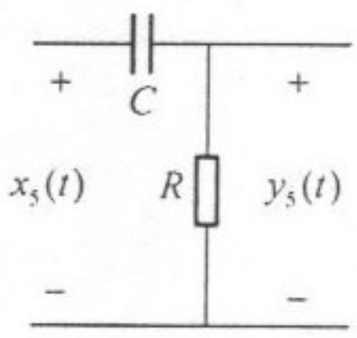


图 3.2

2. 已知 $x_c(t)$ 是一个带限为 ω_M 的**带限信号**，即 $x_c(t) \xleftrightarrow{F} X_c(\omega)=0$，$|\omega|>\omega_M$，并假设 $x_c(t)$ 的频谱为 $X_c(\omega)=1$，$|\omega|<\omega_M$。现有 4 个连续时间信号分别为：

a) $x_1(t)=x_c(t)+x_c(t-\pi/\omega_M)$　　b) $x_2(t)=R_x(t)$ (即 $x_c(t)$ 的自相关函数)，

c) $x_3(t)=x_c^2(t)$　　d) $x_4(t)=x_1(t)\cos 5\omega_M t$，其中，$x_1(t)$ 见 a)

1) 试分别概画出 $x_i(t)$ 的幅度频谱 $|X_i(\omega)|$，$i=1$，2，3，4；并分别求出在对这 4 个信号进行抽样时，可选用的最大抽样间隔 $T_{i\max}$，$i=1$，2，3，4。

2) 分别按上面确定的最大抽样间隔 $T_{i\max}$，对 $x_i(t)$，$i=1$，2，3，4，进行理想冲激串抽样，得到已抽样信号 $x_{Pi}(t)$，$i=1$，2，3，4。试概画出 $x_{Pi}(t)$，$i=1$，2，3，4，的幅度频谱 $|X_{Pi}(\omega)|$，$i=1$，2，3，4。

一、求解下列各小题（每小题 14 分，共 84 分）

1. 已知数字信号 $x[n]$ 和 $v[n]$ 如下表所示，试求它们在区间 $-4 \le n \le 7$ 内的互相关函数 $R_{xv}[n]$。

n	$n<0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$n>9$
$x[n]$	0	1	−1	1	1	1	−1	−1	1	−1	1	0
$v[n]$	0	1	1	1	−1	−1	1	−1	0	0	0	0

解： 由于 $x[n]$ 和 $v[n]$ 均为实的能量受限序列，故它们的互相关函数 $R_{xv}[n]$ 为

$$R_{xv}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m+n]v[m] \quad 或 \quad R_{xv}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]v[m-n] \qquad (2\text{分})$$

按上式计算得到在区间 $-4 \le n \le 7$ 内、$R_{xv}[n]$ 的序列值列表如下：　　（每个值 1 分，共 12 分）

n	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
$R_{xv}[n]$	−3	0	1	0	−1	−1	7	−1	0	−1	−2	1

2. 已知单位阶跃响应为 $s(t)=0.5\pi[tu(t)-(t-2)u(t-2)-(t-4)u(t-4)+(t-6)u(t-6)]$ 的连续时间 LTI 系统和输入信号 $x(t)=\sin \pi t u(t)-\sin \pi(t-2)u(t-2)$，试分别概画出 $x(t)$ 和 $s(t)$ 的波形，并求出该系统对输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$，且概画出 $y(t)$ 的波形。

解： $x(t)$ 和 $s(t)$ 的波形分别如图 1.2.1(a)和(b)所示。　　（2 分）

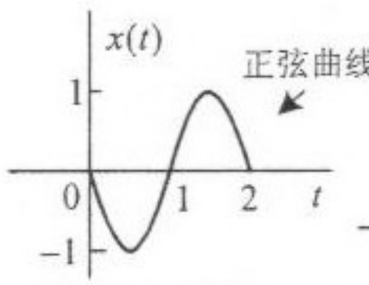


图 1.2.1(a)

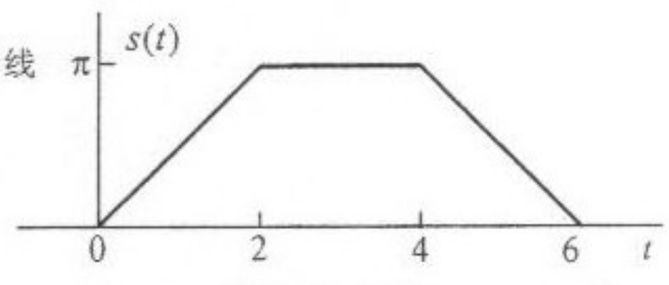


图 1.2.1(b)

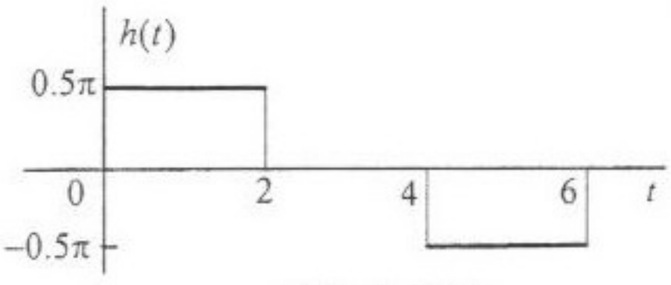


图 1.2.1(c)

系统对 $x(t)$ 的响应为 $y(t)=x(t)*h(t)$，其中，$h(t)=s'(t)$，其波形见图 1.2.1(c)，且可表示为：

$$h(t)=0.5\pi[u(t)-u(t-2)-u(t-4)+u(t-6)] \qquad (2\text{分})$$

然后，可以用多种方法计算 $y(t)$

方法 1：

$$\begin{aligned}
y(t)&=x(t)*h(t)=[\sin \pi t u(t)-\sin \pi(t-2)u(t-2)]*0.5\pi[u(t)-u(t-2)-u(t-4)+u(t-6)]\\
&=0.5\pi\big[\sin \pi t u(t)*u(t)-\sin \pi t u(t)*u(t-2)-\sin \pi t u(t)*u(t-4)+\sin \pi t u(t)*u(t-6)\\
&\quad -\sin \pi(t-2)u(t-2)*u(t)+\sin \pi(t-2)u(t-2)*u(t-2)\\
&\quad +\sin \pi(t-2)u(t-2)*u(t-4)+\sin \pi(t-2)u(t-2)*u(t-6)\big]\\
&=(0.5\pi)\sin \pi t u(t)*u(t)*[\delta(t)-\delta(t-2)-\delta(t-4)+\delta(t-6)-\delta(t-2)+\delta(t-4)+\delta(t-6)-\delta(t-8)]\\
&=(0.5\pi)\sin \pi t u(t)*u(t)*[\delta(t)-2\delta(t-2)+2\delta(t-6)-\delta(t-8)] \qquad (5\text{分})
\end{aligned}$$

其中，令：$y_1(t)=(0.5\pi)\sin \pi t u(t)*u(t)=(0.5\pi)\left[\int_0^{\infty}\sin \pi \tau \mathrm{d}\tau\right]u(t)=\dfrac{(1-\cos \pi t)}{2}u(t)$

则有 $y(t)=y_1(t)-2y_1(t-2)+2y_1(t-6)-y_1(t-8)$

$$=0.5\{(1-\cos \pi t)u(t)-2[1-\cos \pi(t-2)]u(t-2)+2[1\cos \pi(t-6)]u(t-6)-[1-\cos \pi(t-8)]u(t-8)\}$$

上述 $y_1(t)$ 和求得的系统输出 $y(t)$ 的波形分别如图 1.2.1(d)和(e)所示。　　（5 分）

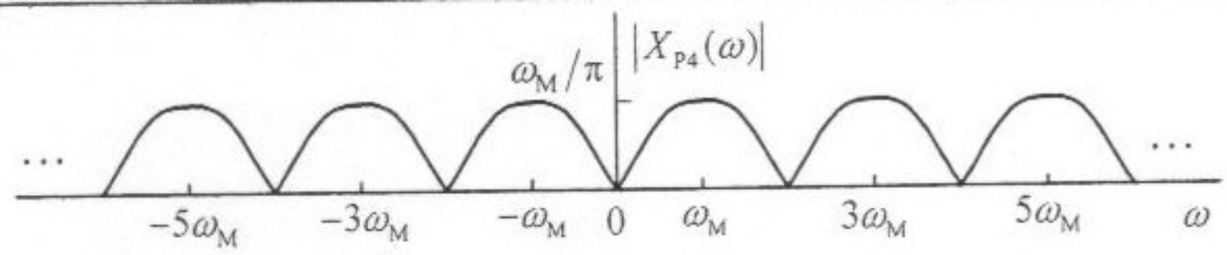

$|X_{P4}(\omega)|$
ω_M/π
...
...
$-5\omega_M$
$-3\omega_M$
$-\omega_M$
0
ω_M
$3\omega_M$
$5\omega_M$
ω

图 3.2.8（4 分）

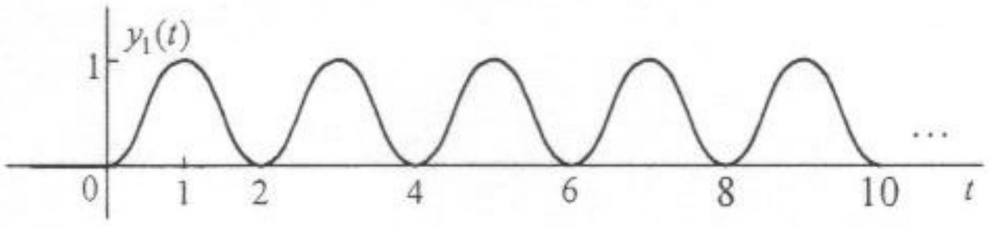


图 1.2.1(d)

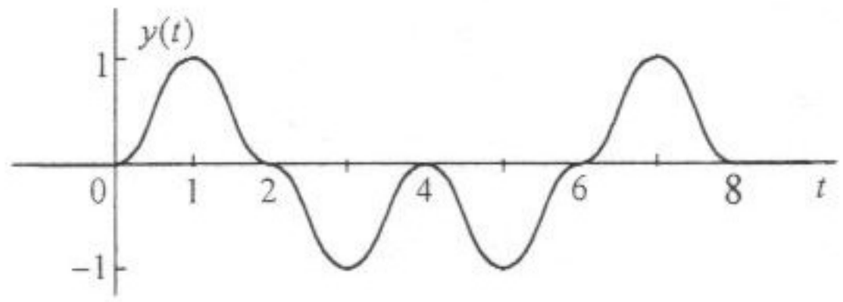


图 1.2.1(e)

方法 2：

根据图 1.2.1(c)的 $h(t)$ 波形，它可写成 $h(t)=h_0(t)-h_0(t-4)$，其中，$h_0(t)=0.5\pi[u(t)-u(t-2)]$。

则有　　$y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*h_0(t)-x(t)*h_0(t-4)=y_0(t)-y_0(t-4)$

其中 $y_0(t)=x(t)*h_0(t)=[\sin\pi tu(t)-\sin\pi(t-2)u(t-2)]*0.5\pi[u(t)-u(t-2)]$

$$=0.5\pi\left[\sin\pi tu(t)*u(t)-\sin\pi tu(t)*u(t-2)-\sin\pi(t-2)u(t-2)*u(t)+\sin\pi(t-2)u(t-2)*u(t-2)\right]$$

$$=(0.5\pi)\sin\pi tu(t)*u(t)*[\delta(t)-2\delta(t-2)+\delta(t-4)]$$　　（4 分）

令：$y_1(t)=(0.5\pi)\sin\pi tu(t)*u(t)=(0.5\pi)\left[\int_0^{\infty}\sin\pi\tau\,\mathrm{d}\tau\right]u(t)=\dfrac{(1-\cos\pi t)}{2}u(t)$

则有　　$y_0(t)=y_1(t)-2y_1(t-2)+y_1(t-4)$

$y_1(t)$ 波形如图 1.2.1(d)所示，故 $y_0(t)$ 波形如图 1.2.1(f)所示。

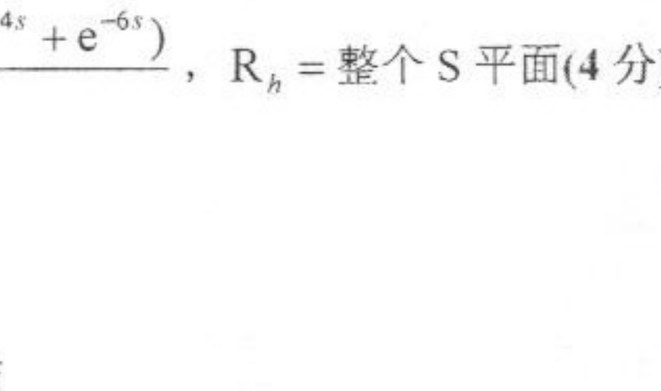


图 1.2.1(f)

最后，根据上面 $y(t)=y_0(t)-y_0(t-4)$，得到

$$y(t)=\frac{1-\cos\pi t}{2}u(t)-[1-\cos\pi(t-2)]u(t-2)$$

$$+[1\cos\pi(t-6)]u(t-6)-\frac{1-\cos\pi(t-8)}{2}u(t-8)$$

因此，求得的系统输出 $y(t)$ 的波形分别如图 1.2.1(e)所示。　　（6 分）

方法 3：拉普拉斯变换方法

由于 $x(t)$ 和 $h(t)$ 都是因果信号，系统对 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 也必然是因果信号，故用单边和双边拉普拉斯变换求解的结果完全相同。

首先，利用如下拉普拉斯变换对：

$$\sin\pi tu(t)\ \overset{\mathrm{L}}{\longleftrightarrow}\ \frac{\pi}{s^2+\pi^2},\ \mathrm{Re}\{s\}>0\quad 和\quad u(t)\ \overset{\mathrm{L}}{\longleftrightarrow}\ \frac{1}{s},\ \mathrm{Re}\{s\}>0$$

并利用拉普拉斯变换的时移性质，求得 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的拉普拉斯变换分别为：

$$X(s)=\mathscr{L}\{\sin\pi tu(t)-\sin\pi(t-2)u(t-2)\}=\frac{\pi(1-\mathrm{e}^{-2s})}{s^2+\pi^2},\ \mathrm{R}_x=整个\ \mathrm{S}\ 平面$$

$$H(s)=\mathscr{L}\{0.5\pi[u(t)-u(t-2)-u(t-4)+u(t-6)]\}=\frac{\pi(1-\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-4s}+\mathrm{e}^{-6s})}{2s},\ \mathrm{R}_h=整个\ \mathrm{S}\ 平面(4\ 分)$$

然后，系统对 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y(s)$ 为

$$Y(s)=\mathscr{L}\{x(t)*h(t)\}=\frac{\pi^2(1-\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-4s}+\mathrm{e}^{-6s})(1-\mathrm{e}^{-2s})}{2s(s^2+\pi^2)}$$

$$=Y_1(s)(1-2\mathrm{e}^{-2s}+2\mathrm{e}^{-6s}-\mathrm{e}^{-8s}),\quad \mathrm{R}_y=整个\ \mathrm{S}\ 平面$$

其中，$Y_1(s)=\dfrac{\pi^2}{2s(s^2+\pi^2)}$，它可以部分分式展开为 $Y_1(s)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{s}-\dfrac{s^2}{s^2+\pi^2}\right]$，$\mathrm{Re}\{s\}>0$。　　（2 分）

最后，对 $Y_1(s)$ 和 $Y(s)$ 求反拉普拉斯变换得到 $y_1(t)$ 和 $y(t)$ 分别为

$$y_1(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y_1(s),\ \mathrm{Re}\{s\}>0\}=0.5(1-\cos\pi t)u(t)$$

和　$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y_1(s)(1-2\mathrm{e}^{-2s}+2\mathrm{e}^{-6s}-\mathrm{e}^{-8s}),\ \mathrm{R}_y\}=y_1(t)-2y_1(t-2)+2y_1(t-6)-y_1(t-8)$

$$=0.5\{(1-\cos\pi t)u(t)-2[1-\cos\pi(t-2)]u(t-2)+2[1\cos\pi(t-6)]u(t-6)-[1-\cos\pi(t-8)]u(t-8)\}$$

上述 $y_1(t)$ 和求得的系统输出 $y(t)$ 的波形分别如图 1.2.1(d)和(e)所示。　　（4 分）

方法 4：傅里叶变换方法

由于 $x(t)$ 和 $h(t)$ 都是因果的能量受限信号，系统对 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 也必然是因果的能量受限信号，它们都存在傅里叶变换，故可以用傅里叶变换方法求解，求解方法和过程与方法 3 类似，结果也完全相同，这里不再累述。

3. 现成可用的 FFT 程序都是为计算**复序列**的 DFT 设计的，试画出只使用一次 N 点 FFT 程序，能同时计算出两个 N 点**实序列** $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 N 点 DFT $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 的计算流程图(图中只允许有一个计算 N 点 DFT 的方框)。

解： 把两个 N 点实序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 分别作为 N 点复序列 $v[n]$ 的实部和虚部，即

$$v[n]=x_1[n]+\mathrm{j}x_2[n] \qquad \text{（2 分）}$$

若令 $v[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} V(k)$，$x_1[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_1(k)$ 和 $x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_2(k)$

因为有 $x_1[n]=0.5\{v[n]+v^*[n]\}$ 和 $x_2[n]=-0.5\mathrm{j}\{v[n]-v^*[n]\}$

利用 N 点 DFT 的线性性质和对称性质，则分别有

$$X_1(k)=0.5[V(k)+V^*(N-k)],\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$$

$$X_2(k)=-0.5\mathrm{j}[V(k)-V^*(N-k)],\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1 \qquad \text{（6 分）}$$

根据上述 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 的计算公式，可以画出的计算流程图如图 1.3 所示。 （6 分）

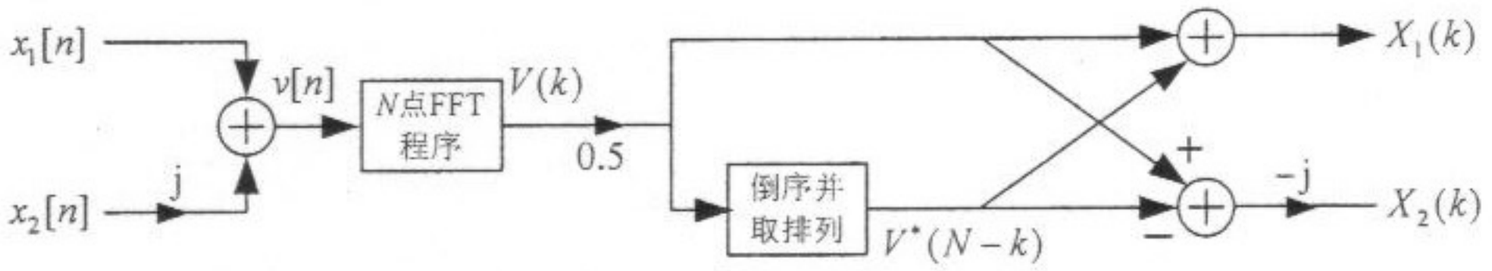


图 1.3

4. 一个具有升余弦特性的带通滤波器的频率响应 $H(\omega)$ 如图 1.4 所示，试求其单位冲激响应 $h(t)$，并概画出 $h(t)$ 的波形，该滤波器因果吗？

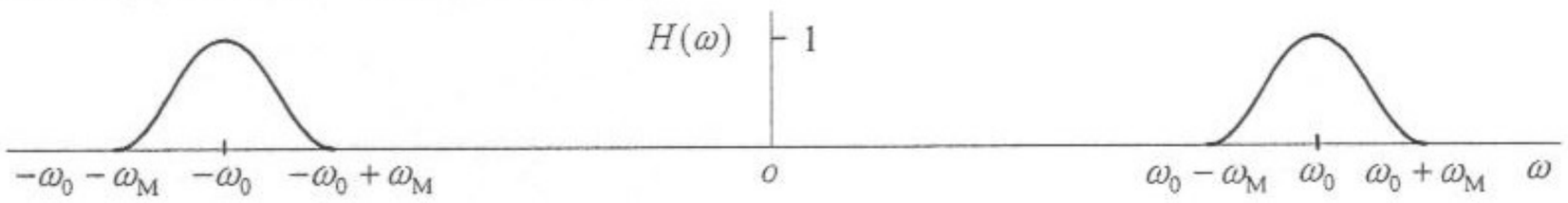


图 1.4

解： 该带通滤波器的频率响应 $H(\omega)$ 可以表示为

$$H(\omega)=H_0(\omega)*[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

其中，$H_0(\omega)=\begin{cases}0.5[1+\cos(\pi\omega/\omega_{\mathrm{M}})], & |\omega|<\omega_{\mathrm{M}}\\ 0, & |\omega|>\omega_{\mathrm{M}}\end{cases}$，它是一个具有升余弦特性的低通滤波器。（2 分）

进一步，$H(\omega)$ 可以写成 $$H(\omega)=\frac{1}{2\pi}H_0(\omega)*2\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

利用傅里叶变换的频域卷积性质，和 $\mathscr{F}\{\cos\omega_0 t\}=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$、$h_0(t)=\mathscr{F}\{H_0(\omega)\}$，则有 $$h(t)=2h_0(t)\cos\omega_0 t \qquad \text{（2 分）}$$

只要求出 $h_0(t)$，就得到 $h(t)$。利用 $\frac{\omega_{\mathrm{M}}}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_{\mathrm{M}}t)=\frac{\sin\omega_{\mathrm{M}}t}{\pi t} \xleftrightarrow{\text{F}} H_{\mathrm{LP}}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_{\mathrm{M}}\\ 0, & |\omega|>\omega_{\mathrm{M}}\end{cases}$

和傅里叶变换的频域卷积性质，可以求得 $h_0(t)$ 如下：

$$\begin{aligned}h_0(t)&=\mathscr{F}^{-1}\{H_0(\omega)\}=\mathscr{F}^{-1}\{0.5[1+\cos(\pi\omega/\omega_{\mathrm{M}})]H_{\mathrm{LP}}(\omega)\}\\&=\mathscr{F}^{-1}\left\{0.5\left[H_{\mathrm{LP}}(\omega)+0.5H_{\mathrm{LP}}(\omega)e^{\mathrm{j}\omega(\pi/\omega_{\mathrm{M}})}+0.5H_{\mathrm{LP}}(\omega)e^{-\mathrm{j}\omega(\pi/\omega_{\mathrm{M}})}\right]\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\omega_{\mathrm{M}}t}{\pi t}+\frac{1}{2}\frac{\sin\omega_{\mathrm{M}}(t+\pi/\omega_{\mathrm{M}})}{\pi(t+\pi/\omega_{\mathrm{M}})}+\frac{1}{2}\frac{\sin\omega_{\mathrm{M}}(t-\pi/\omega_{\mathrm{M}})}{\pi(t-\pi/\omega_{\mathrm{M}})}\right\}\end{aligned}$$

最后得到 $h(t)=2h_0(t)\cos\omega_0 t=\left\{\dfrac{\sin\omega_M t}{\pi t}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\omega_M(t+\pi/\omega_M)}{\pi(t+\pi/\omega_M)}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\omega_M(t-\pi/\omega_M)}{\pi(t-\pi/\omega_M)}\right\}\cos\omega_0 t$ （8 分）

$h(t)$ 的波形如图 1.4.1 所示。 （2 分）

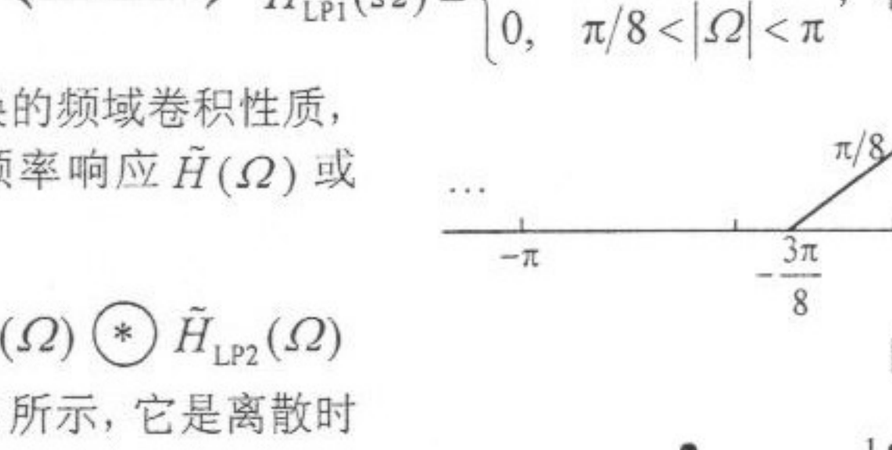


图 1.4.1

5. 已知离散时间 LTI 系统的单位冲激响应为 $h[n]=\dfrac{\sin(\pi n/4)\sin(\pi n/8)}{\pi n^2}$，它是什么类型（低通、高通、带通等）的滤波器，并求当系统输入为如下的 $x[n]$ 时，系统的输出信号 $y[n]$。

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-2k]e^{jk\pi}+\sum_{k=0}^{2}2^{-k}\cos(2\pi kn/5)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{17\pi n}{8}-\frac{\pi}{3}\right)$$

解： 因为有 $\dfrac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\tilde{H}_{LP1}(\Omega)=\begin{cases}1, & |\Omega|<\pi/4\\ 0, & \pi/4<|\Omega|<\pi\end{cases}$，在主值区间 $(-\pi,\ \pi)$ 内，

和 $\dfrac{\sin(\pi n/8)}{\pi n}\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\tilde{H}_{LP1}(\Omega)=\begin{cases}1, & |\Omega|<\pi/8\\ 0, & \pi/8<|\Omega|<\pi\end{cases}$，在主值区间 $(-\pi,\ \pi)$ 内，

并利用离散时间傅里叶变换的频域卷积性质，则离散时间 LTI 系统的频率响应 $\tilde{H}(\Omega)$ 或 $H(e^{j\Omega})$ 为

$$\tilde{H}(\Omega)=(1/2\pi)\pi\tilde{H}_{LP1}(\Omega)\circledast\tilde{H}_{LP2}(\Omega)$$

$\tilde{H}(\Omega)$ 的函数图形如图 1.5 所示，它是离散时间低通滤波器。 （6 分）

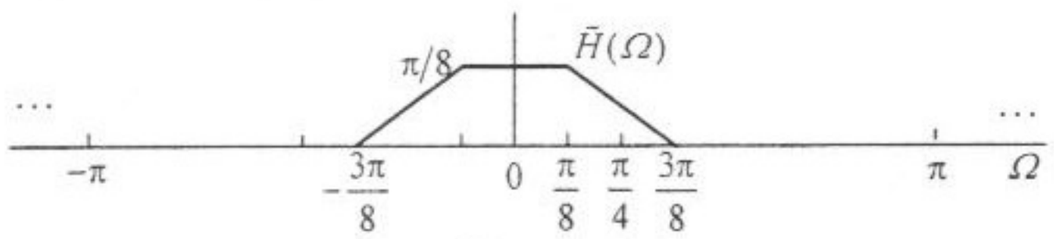


图 1.5.1

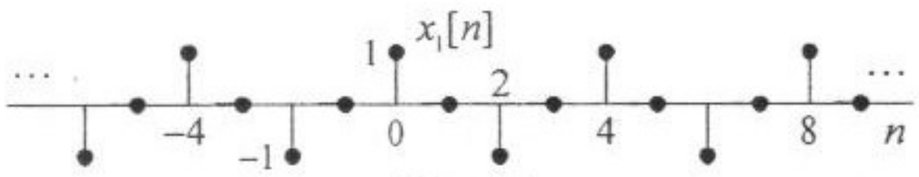


图 1.5.2

再看输入信号 $x[n]$，它有三个分量 $x_1[n]$、$x_2[n]$ 和 $x_3[n]$ 组成：

1) $x_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-2k]e^{jk\pi}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta[n-2k]$

其序列图形如图 1.5.2 所示。它是一个周期为 $N_1=4$ 的正负周期冲激串，且有 $x_1[n]=\cos(\pi n/2)$。

由图 1.5.1 的 $\tilde{H}(\Omega)$ 可以看出，$x_1[n]$ 通过系统的输出 $y_1[n]=0$ （3 分）

2) $x_2[n]=\sum_{k=0}^{2}2^{-k}\cos(2\pi kn/5)$，它是一个周期为 $N_2=5$ 的周期序列的离散傅里叶级数表示，其基波频率 $\Omega_1=2\pi/5$ 大于该离散时间低通滤波器的截止频率 $3\pi/8$。因此，只有它的常数序列分量有输出，且输出为 $y_2[n]=\tilde{H}(0)=1$ （2 分）

3) $x_1[n]=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{17\pi n}{8}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi n}{8}-\dfrac{\pi}{3}\right)$，它是一个频率为 $\pi/8$ 的正弦序列，系统对它的输出为 $y_3[n]=\tilde{H}(\pi/8)x_3[n]=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi n}{8}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ （2 分）

最后，系统在输入为 $x[n]$ 时的输出信号 $y[n]=y_1[n]+y_2[n]+y_3[n]=1+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi n}{8}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ （1 分）

6. 某连续时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)=tu(t)-2(t-2)u(t-2)+(t-4)u(t-4)$，它的输入是**周期信号** $\tilde{x}(t)$，并已知 $\tilde{x}(t)$ 的**单边**拉普拉斯变换为 $[s(1+\mathrm{e}^{-s})]^{-1}$，试求系统的输出 $y(t)$。

解： 该系统的 $h(t)$ 的波形如图 1.6.1 所示。

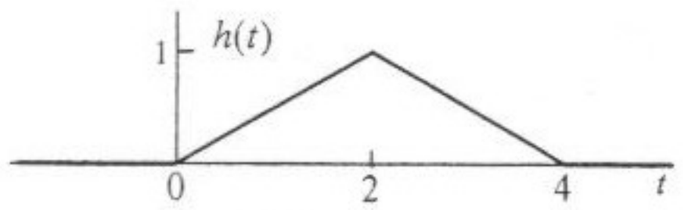


图 1.6.1

输入周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的单边拉普拉斯变换 $X_{\mathrm{u}}(s)$ 为

$$X_{\mathrm{u}}(s)=\frac{1}{s(1+\mathrm{e}^{-s})}=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{e}^{-s})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-ns}\right]。$$

它的单边拉普拉斯反变换为

$$\tilde{x}(t)u(t)=\mathscr{L}_{\mathrm{u}}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^m\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-ns}\right]\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u(t-n)$$

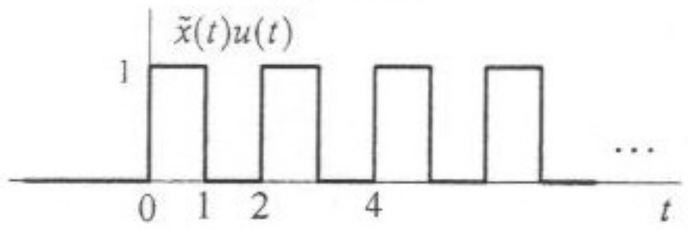


图 1.6.2

它的波形如图 1.6.2 所示。由于 $\tilde{x}(t)$ 是周期信号，其负时域部分应是正时域部分的周期重复，且重复周期为 $T=2$。因此，$\tilde{x}(t)$ 的波形如图 1.6.3 所示。 （6 分）

然后，可以用<u>两种方法</u>计算输出 $y(t)$

<u>方法 1：时域图解卷积的方法</u>

$$y(t)=\tilde{x}(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{x}(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

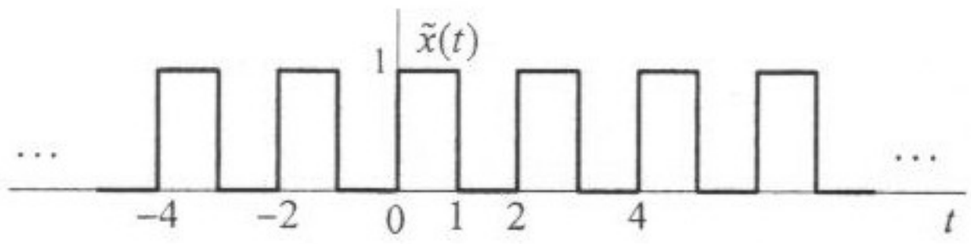


图 1.6.3

图 1.6.4 中画出了 $t=0$，0.5，1，1.5 四种情况下的 $\tilde{x}(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 的函数图形，并用蓝色填充的区域表示被积函数 $\tilde{x}(\tau)h(t-\tau)$ 曲线下的面积，积分的值，它们都是 1。这四个图形的情况足以表明：对于任意的 t，上述卷积积分的值均为 0.5。因此，求得系统在 $\tilde{x}(t)$ 输入时的输出是常数信号，即

$$y(t)=1 \qquad （8 分）$$

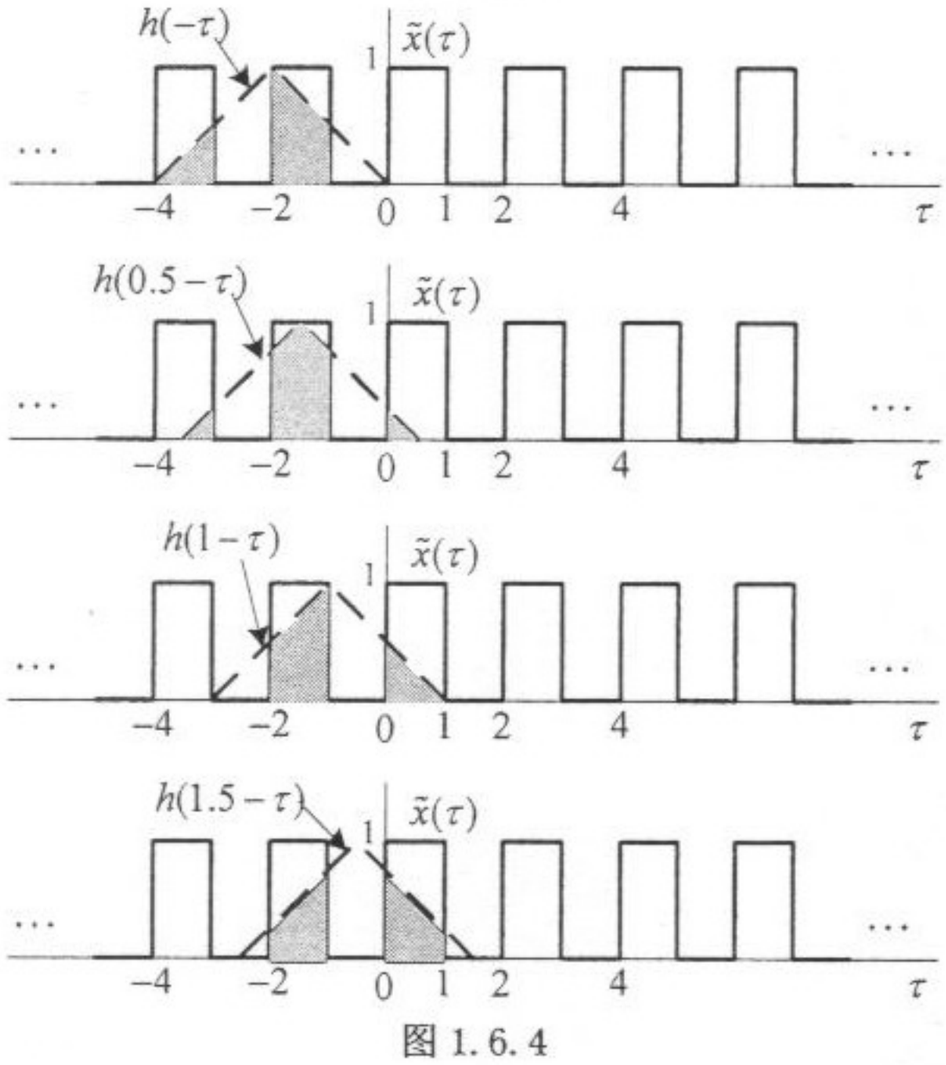


图 1.6.4

<u>方法 2：傅里叶方法</u>

由图 1.6.1，$h(t)$ 可以写成

$$h(t)=0.5[u(t)-u(t-2)]*[u(t)-u(t-2)]$$

因为 $\quad \mathscr{F}\{u(t)-u(t-2)\}=2\mathrm{Sa}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$

利用傅里叶变化的时域卷积性质，该连续时间 LTI 系统的频率响应为

$$H(\omega)=\mathscr{F}\{h(t)\}=2[Sa(\omega)]^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

它的幅度频率响应为 $|H(\omega)|=2[Sa(\omega)]^2$，其函数图形如图 1.6.5 所示。 （4 分）

<u>也可以用傅里叶变换的其它性质求出</u> $H(\omega)$。

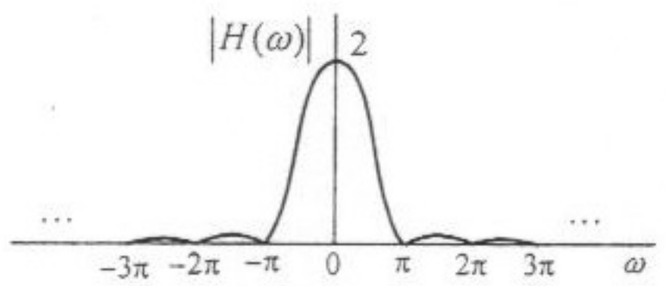


图 1.6.5

再考察周期输入 $\tilde{x}(t)$，由图 1.6.3，周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的周期为 $T=2$，重复频率为 $\omega_0=\pi$。$\tilde{x}(t)$ 的傅里叶级数表示为

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\pi t}$$

且从图 1.6.3 中 $\tilde{x}(t)$ 的波形。可以直接求得 $F_0=0.5$。

因此，系统在周期输入 $\tilde{x}(t)$ 时的输出为

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_kH(k\pi)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\pi t}。$$

并且，由图 1.6.5 可以看出 $\quad H(k\pi)=\begin{cases}2, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$

最后求得 $\quad y(t)=F_0H(0)=0.5\times 2=1$ （4 分）

二、求解下列 2 小题（每小题 13 分，共 26 分）

1. 某因果数字滤波器由如下差分方程和零起始条件表示，试求它的系统函数，画出其零、极点图和收敛域，它是 FIR 还是 IIR 滤波器？并画出它用三种基本数字单元构成的**并联结构**的信号流图。

$$y[n]+0.25y[n-1]-0.125y[n-2]=(0.5)^n\sum_{k=-\infty}^{n}2^k x[k]$$

解：该因果数字滤波器的差分方程可以改写为

$$y[n]+0.25y[n-1]-0.125y[n-2]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k](0.5)^{n-k}=x[n]*(0.5)^n u[n]$$

对上式两边取 Z 变换后，可以得到该因果数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 如下

$$H(z)=\frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1+0.25z^{-1}-0.125z^{-2})}=\frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})(1-0.25z^{-1})}$$

它的零、极点图和收敛域如图 2.1.1 所示，并且，它是一个 IIR 滤波器。（6 分）

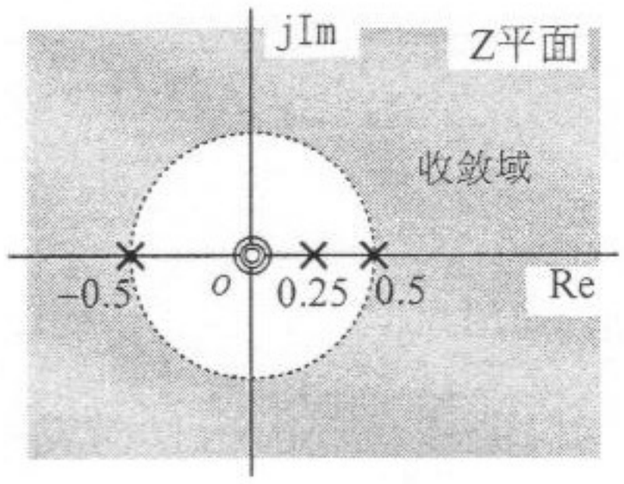


图 2.1.1

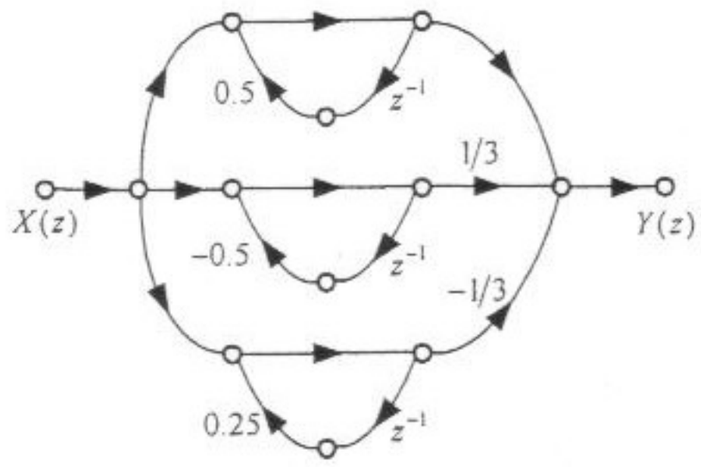


图 2.1.2

它可以部分分式展开为 $$H(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{1/3}{1+0.5z^{-1}}-\frac{1/3}{1-0.25z^{-1}}$$

由此，可以画出该因果数字滤波器的并联结构的信号流图，见图 2.1.2 所示。（7 分）

2. 试求用相同差分方程和起始条件 $y[-1]=2/9$、$y[-2]=-4/3$ 表示的离散时间因果系统，在输入 $x[n]=u[n]$ 时的零输入响应 $y_{zi}[n]$ 和零状态响应 $y_{zs}[n]$，并分别写出其稳态响应和暂态响应。

解：由上面可知，该离散时间因果系统的差分方程可以改写为

$$y[n]+0.25y[n-1]-0.125y[n-2]=x[n]*(0.5)^n u[n]$$

首先，求零状态响应 $y_{zs}[n]$。系统在输入 $x[n]=u[n]$ 时的零状态响应 $y_{zs}[n]$，就是用上述差分方程表示的因果 LTI 系统在输入 $x[n]=u[n]$ 时的输出。因此，利用上面已得的 $H(z)$ 的部分分式展开式，$y_{zs}[n]$ 的拉普拉斯变换为

$$Y_{zs}(z)=H(z)X(z)=\left[\frac{1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{1/3}{1+0.5z^{-1}}-\frac{1/3}{1-0.25z^{-1}}\right]\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1/3}{1+0.5z^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1/3}{1-0.25z^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z|>1$$

进一步部分分式展开为

$$Y_{zs}(z)=\left[\frac{2}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\right]+\frac{1}{3}\left[\frac{2/3}{1-z^{-1}}+\frac{1/3}{1+0.5z^{-1}}\right]-\frac{1}{3}\left[\frac{4/3}{1-z^{-1}}-\frac{1/3}{1-0.25z^{-1}}\right]$$

$$=\frac{16/9}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{1/9}{1+0.5z^{-1}}+\frac{1/9}{1-0.25z^{-1}},\quad |z|>1$$

对它进行拉普拉斯反变换，得到零状态响应 $y_{zs}[n]$ 为

$$y_{zs}[n]=(16/9)u[n]-(0.5)^n u[n]+(1/9)(-0.5)^n u[n]+(1/9)(0.25)^n u[n]$$（6 分）

然后，再求零输入响应 $y_{zi}[n]$。$y_{zi}[n]$ 就是满足如下齐次差分方程和非零起始条件 $y_{zi}[-1]=2/9$、

$y_{zi}[-2]=-4/3$ 的解。

$$y_{zi}[n]+0.25y_{zi}[n-1]-0.125y_{zi}[n-2]=0$$

对该齐次差分方程取单边拉普拉斯变换，并代入起始条件 $y_{zi}[-1]=2/9$ 和 $y_{zi}[-2]=-4/3$，得到

$$Y_{uzi}(s)=\frac{-2/9+(1/36)z^{-1}}{1+0.25z^{-1}-0.125z^{-1}}=\frac{-2/9+(1/36)z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.25z^{-1})}=\frac{-1/9}{1+0.5z^{-1}}-\frac{1/9}{1-0.25z^{-1}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

对它进行单边拉普拉斯反变换，得到零输入响应 $y_{zi}[n]$ 为

$$y_{zi}[n]=-(1/9)(-0.5)^n u[n]-(1/9)(0.25)^n u[n]$$ （5分）

最后，可以得到在输入 $x[n]=u[n]$ 时系统的全响应 $y[n]$ 为

$$y[n]=y_{zs}[n]+y_{zi}[n]=(16/9)u[n]-(0.5)^n u[n]$$

其中，暂态响应为 $y_{zt}[n]=-(0.5)^n u[n]$，稳态响应为 $y_{wt}[n]=(16/9)u[n]$ （2分）

三、综合分析题（每小题 20 分，共 40 分）

1. 某连续时间 LTI 系统如图 3.1 所示，图中的**系统 5** 是图 3.1.1 所示的 RC 微分电路，它的时间常数 $\tau=RC=10$ **μs**（微秒）；并已知：

$$h_1(t)=\frac{\sin 10\pi t}{\pi t},\quad H_2(\omega)=\begin{cases}e^{-j0.2\omega}, & |\omega|<10\pi\\ 0, & |\omega|>10\pi\end{cases},\quad h_3(t)=\begin{cases}1/\pi t, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases},\quad H_4(\omega)=\begin{cases}-j, & \omega>0\\ j, & \omega<0\end{cases}$$

试求图 3.1.2 所示整个系统的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出它的波形。

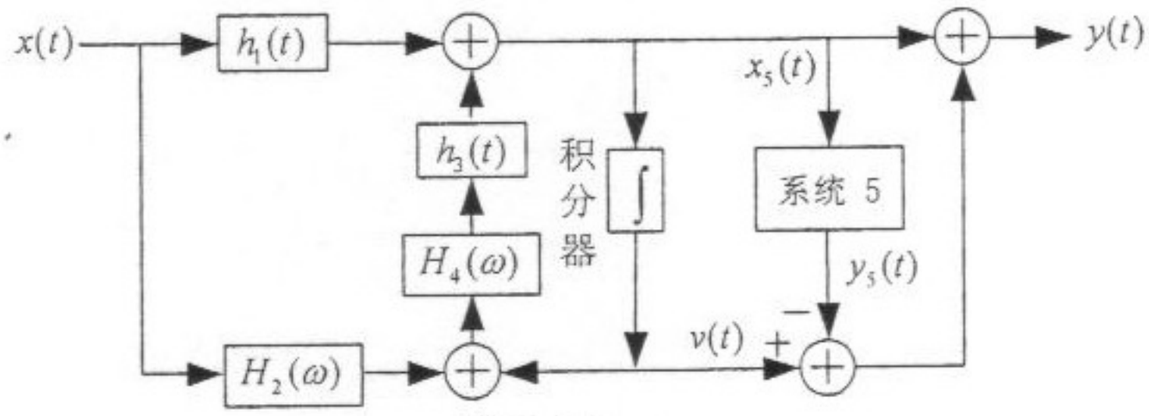


图 3.1.1

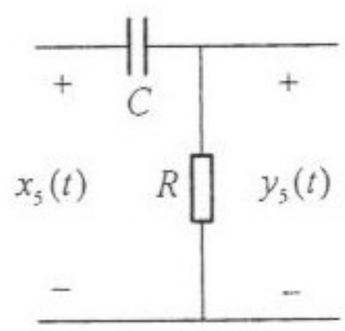


图 3.1.2

解：由于：1) $h_3(t)$ 和 $H_4(\omega)=-\mathrm{jsgn}(\omega)$ 分别是连续时间 90° 移相器的单位冲激响应和频率响应，即

$$\mathcal{F}\{h_3(t)\}=H_3(\omega)=-\mathrm{jsgn}(\omega)。$$

因此，图 3.1.1 中 $h_3(t)$ 和 $H_4(\omega)$ 级联的 LTI 系统的频率响应为 $H_0(\omega)=H_3(\omega)H_4(\omega)=-1$，它是反相器；2) 在图 3.1.1 中，$y(t)=x_5(t)+[v(t)-y_5(t)]=[x_5(t)-y_5(t)]+v(t)$。基于这两个理由，图 3.1.1 的整个 LTI 系统等价为图 3.1.3 所示的系统，其中，$H_5(s)$ 系统 5 的系统函数。 （4分）

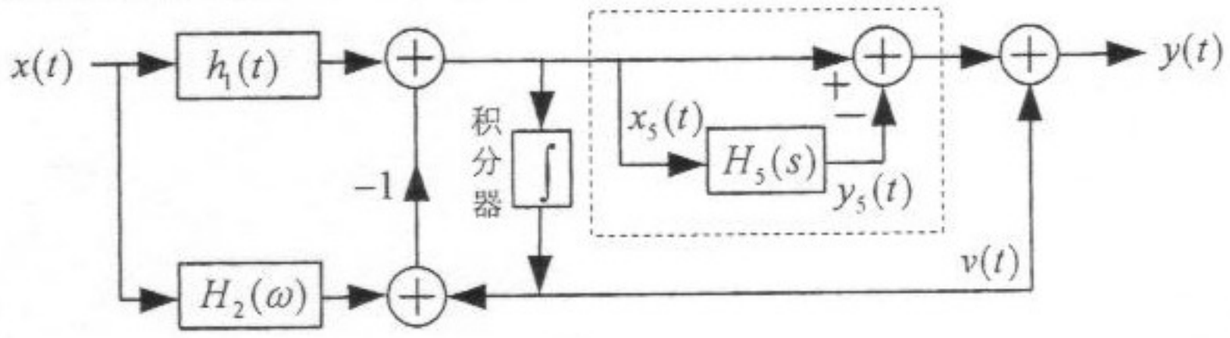


图 3.1.3

考察图 3.1.3 中虚线框内的系统：其中，$H_5(s)$ 是图 3.1.2 所示的 RC 微分电路（因果的一阶系统）的系统函数，可以通过列出 $x_5(t)$ 与 $y_5(t)$ 满足的微分方程，或者电路的 S 域模型的方法，得到 $H_5(s)=\dfrac{s}{s+1/\tau}=\dfrac{s}{s+10^5}$。故虚线框中 LTI 系统的系统函数为 $H_0(s)=1-H_5(s)=\dfrac{10^5}{s+10^5}$，它的频率响应为 $H_0(\omega)=\dfrac{10^5}{j\omega+10^5}$，这是一个 3dB 截至频率 $\omega_c=10^5$ 的一阶低通滤波器。再看图 3.1.3

中 $h_1(t)$ 的 LTI 系统，它的频率响应为 $H_1(\omega)=\mathscr{F}\left\{\dfrac{\sin 10\pi t}{\pi t}\right\}=\begin{cases}1, & |\omega|<10\pi\\ 0, & |\omega|>10\pi\end{cases}$，这样，$H_2(\omega)$ 就可以写成 $H_2(\omega)=H_1(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.2\omega}$，且有 $h_2(t)=\mathscr{F}^{-1}\{H_2(\omega)\}=h_1(t-0.2)$。另外，积分器的系统函数为 $1/s$。因此，图 3.1.3 的整个系统又可以等价为图 3.1.4 所示的 LTI 系统。（8分）

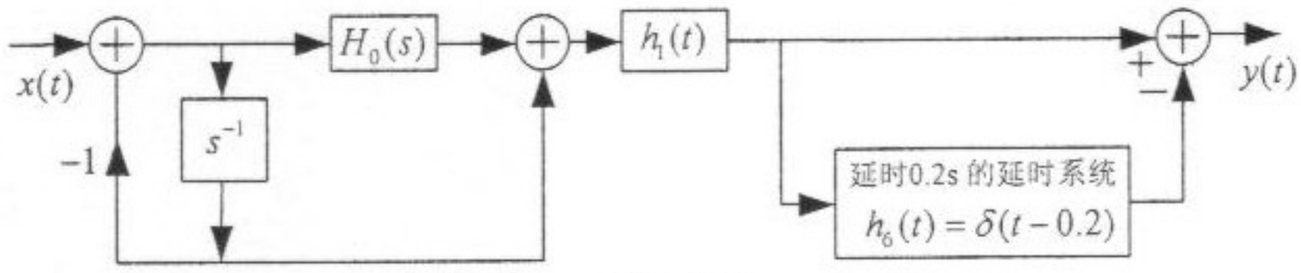


图3.1.4

进一步，由于 $H_0(\omega)$ 的 3dB 低通截至频率 $\omega_c=10^5$ 远远高于理想低通 $H_1(\omega)$ 的截至频率 10π，故可以作出**足够精确的工程近似**，即 $H_0(\omega)\approx 1$，$|\omega|<10\pi$，或者，$H_0(\omega)H_1(\omega)\approx H_1(\omega)$，因此，图 3.1.4 的系统又可以等价图 3.1.5 的 LTI 系统。（4分）

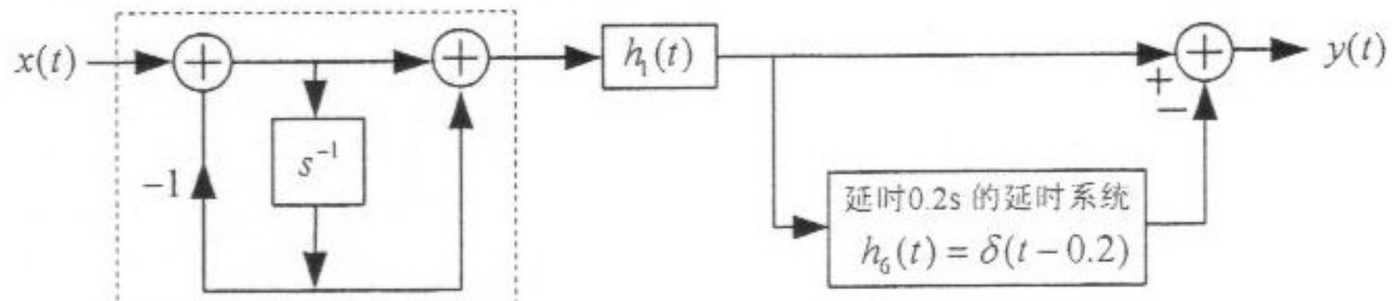


图 3.1.5

图 3.1.5 中虚线框内的 LTI 系统的系统函数求得为 $H_7(s)=\dfrac{s+1}{s+1}=1$，它是恒等系统。因此，图 3.1.5 的系统最终等价为图 3.1.6 所示的系统。（2分）

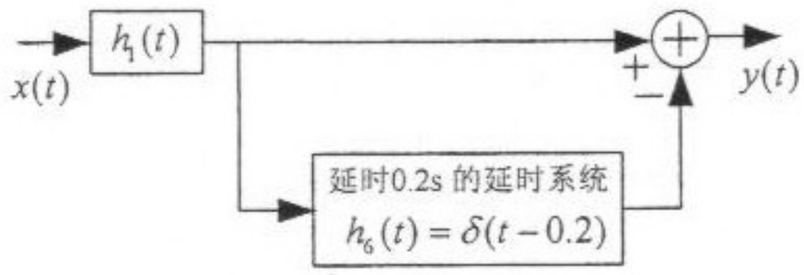


图 3.1.6

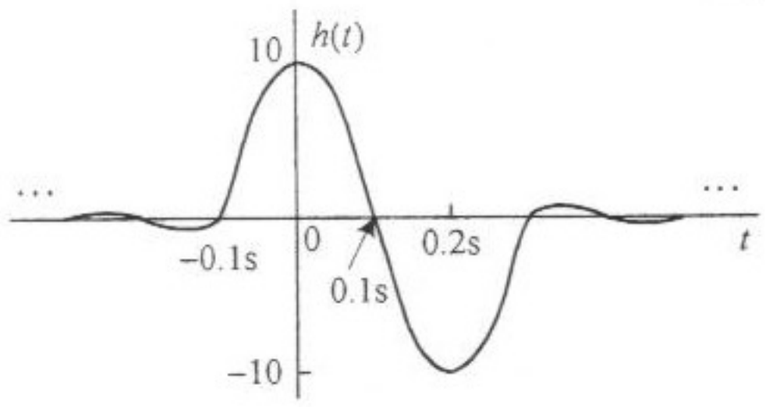


图 3.1.7

由图 3.1.6 看出，所求的整个系统的单位冲激响应可以足够精确地近似为：

$$h(t)\approx h_1(t)-h_1(t-0.2)=\frac{\sin 10\pi t}{\pi t}-\frac{\sin 10\pi(t-0.2)}{\pi(t-0.2)}$$

它的波形如图 3.1.7 所示。（2分）

2. 已知 $x_c(t)$ 是一个带限为 ω_M 的**带限信号**，即 $x_c(t)\xleftrightarrow{\mathrm{F}}X_c(\omega)=0$，$|\omega|>\omega_M$，并假设 $x_c(t)$ 的频谱为 $X_c(\omega)=1$，$|\omega|<\omega_M$。现有 4 个连续时间信号分别为：

a) $x_1(t)=x_c(t)+x_c(t-\pi/\omega_M)$

b) $x_2(t)=R_x(t)$ (即 $x_c(t)$ 的自相关函数)，

c) $x_3(t)=x_c^2(t)$

d) $x_4(t)=x_1(t)\cos 5\omega_M t$，其中，$x_1(t)$ 见 a)

1) 试分别概画出 $x_i(t)$ 的幅度频谱 $|X_i(\omega)|$，$i=1$，2，3，4；并分别求出在对这 4 个信号进行抽样时，可选用的最大抽样间隔 $T_{i\max}$，$i=1$，2，3，4。

2) 分别按选定的最大抽样间隔 $T_{i\max}$，对 **3** 个 $x_i(t)$，$i=1$，3，4，进行理想冲激串抽样，得到 **3** 个已抽样信号 $x_{Pi}(t)$，$i=1$，3，4。试概画出 **3** 个 $x_{Pi}(t)$，$i=1$，3，4，的幅度频谱 $|X_{Pi}(\omega)|$，$i=1$，3，4。

解：本小题假设的 $x_c(t)$ 之频谱 $X_c(\omega)$ 如图 3.2.1 所示。

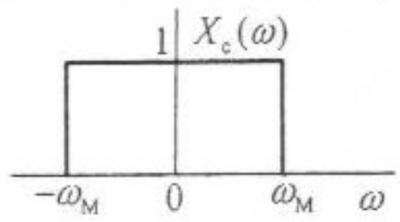


图 3.2.1

1) 首先，分别求出和概画 $x_i(t)$ 的幅度频谱 $|X_i(\omega)|$，$i=1$，2，3，4，并分别计算对它们抽样的最大抽样间隔 $T_{i\max}$，$i=1$，2，3，4。

a) $X_1(\omega)=X_c(\omega)\left[1+e^{-j\omega(\pi/\omega_M)}\right]=2X_c(\omega)\cos\left[(\pi/2\omega_M)\omega\right]e^{-j\omega(\pi/2\omega_M)}$

则有，$|X_1(\omega)|=2X_c(\omega)\cos\left[(\pi/2\omega_M)\omega\right]$，其幅度频谱见图 3.2.2。由此看出，$x_1(t)$ 是带限为 ω_M 的低通带限信号，故对 $x_1(t)$ 抽样的最大抽样间隔 $T_{1\max}=\pi/\omega_M$。（3 分）

b) $X_2(\omega)=\mathcal{F}\left\{R_x(t)\right\}=\mathcal{F}\left\{x_c(t)*x_c^*(t)\right\}=|X_c(\omega)|^2$

则有，$|X_2(\omega)|=|X_c(\omega)|^2$，其幅度频谱与 $|X_c(\omega)|$ 相同，如图 3.2.3 所示。由此看出，$x_2(t)$ 是带限为 ω_M 的低通带限信号，故对 $x_2(t)$ 抽样的最大抽样间隔 $T_{2\max}=\pi/\omega_M$。（2 分）

c) $X_3(\omega)=\mathcal{F}\left\{x^2(t)\right\}=(1/2\pi)X_c(\omega)*X_c(\omega)$

则有，$|X_3(\omega)|=|X_c(\omega)*X_c(\omega)|$，幅度频谱 $|X_3(\omega)|$ 如图 3.2.4 所示。由此看出，$x_3(t)$ 是带限为 $2\omega_M$ 的低通带限信号，故对 $x_3(t)$ 抽样的最大抽样间隔 $T_{3\max}=\pi/2\omega_M$。（3 分）

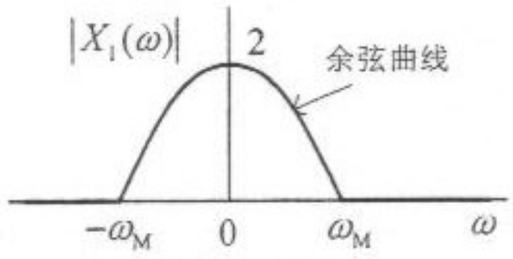


图 3.2.2

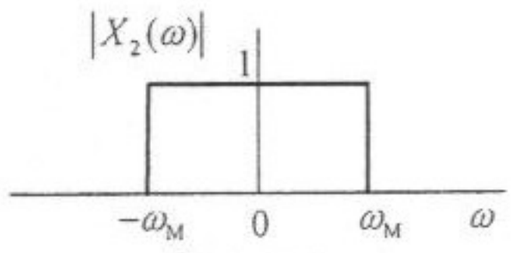


图 3.2.3

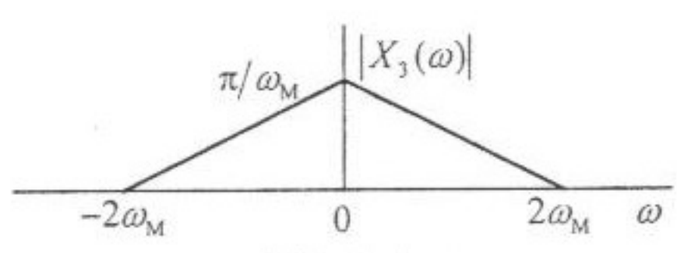


图 3.2.4

d) $X_4(\omega)=\mathcal{F}\left\{x_1(t)\cos 5\omega_M t\right\}=(1/2\pi)X_1(\omega)*\pi\left[\delta(\omega+5\omega_M)+\delta(\omega-5\omega_M)\right]$

$=0.5\left[X_1(\omega+5\omega_M)+X_1(\omega-5\omega_M)\right]$

则有，$|X_4(\omega)|=0.5\left[|X_1(\omega+5\omega_M)|+|X_1(\omega-5\omega_M)|\right]$，其幅度频谱如图 3.2.5 所示。由图 3.2.5 看到，$x_3(t)$ 是一个频带宽度为 $2\omega_M$ 的带通带限信号，根据带通抽样定理，对 $x_4(t)$ 抽样的最大抽样间隔 $T_{4\max}=\pi/\omega_M$。（4 分）

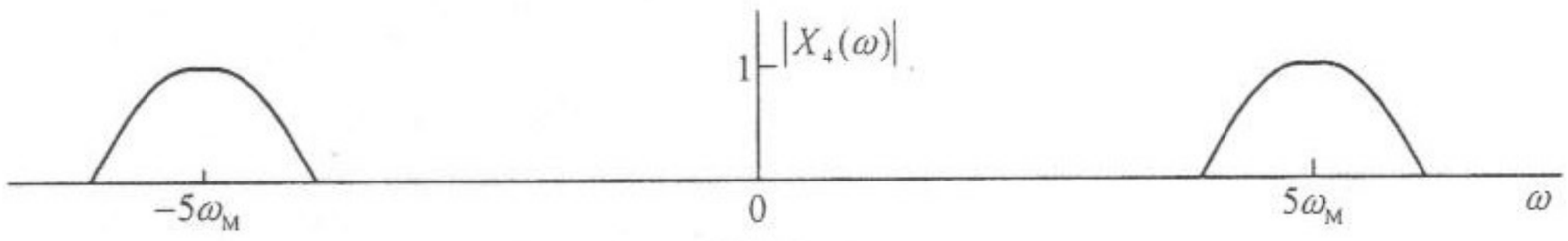


图 3.2.5

2) 根据上面画出的 $x_i(t)$ 的幅度频谱 $|X_i(\omega)|$，$i=1$，2，3，4，并按计算出的抽样的最大抽样间隔 $T_{i\max}$，$i=1$，2，3，4，分别对 $x_i(t)$，$i=1$，2，3，4，进行理想冲激串抽样，得到已抽样信号 $x_{Pi}(t)$ 的幅度频谱 $|X_{Pi}(\omega)|$，$i=1$，2，3，4，分别见图 3.2.6、图 3.2.7 和图 3.2.8。

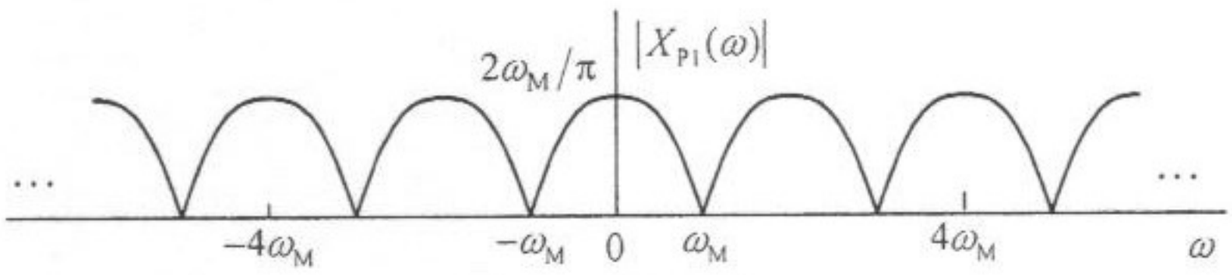


图 3.2.6（2 分）

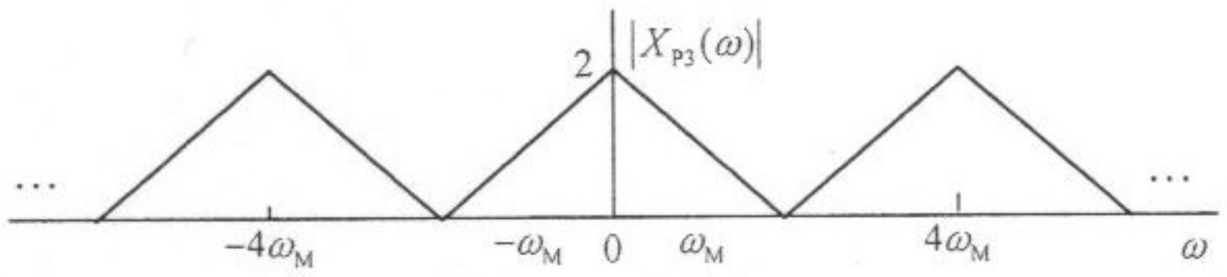


图 3.2.7（2 分）

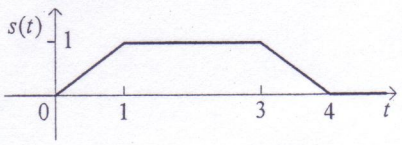
所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

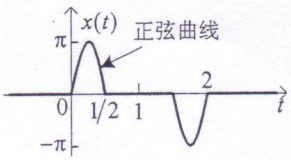
提醒：请看清每题的题意和要求，特别注意黑体字。若结果是实函数，必须写出实函数表达式；按题意要求画出的函数图形，必须有必要的坐标标注。

2008 中科大 信号与系统

一、基本分析和计算题（每小题分值由各小题标出，共 90 分）

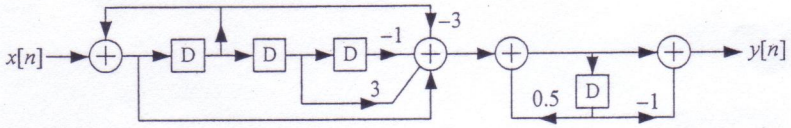
1. 某连续时间 LTI 系统的**单位阶跃响应** $s(t)$ 和输入 $x(t)$ 见下图，**必须用时域卷积**方法求系统的输出 $y(t)$，并概画出它的波形。 **(14 分)**



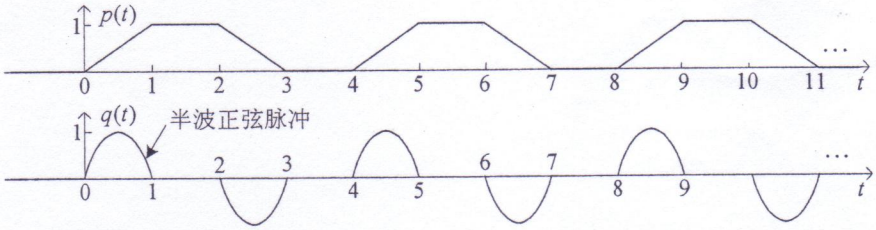


2. 已知某个 **IIR** 数字滤波器的结构如下图所示，图中 **D** 为**单位延时**，试求其单位**阶跃响应** $s[n]$，并计算在**如下因果输入** $x[n]$ 时、滤波器输出 $y[n]$ 的**前 5 个**序列值。 **(12 分)**

$x[n]=0$，$n<0$；$x[0]=4$；$x[1]=2$；$x[2]=2$；$x[3]=-6$；$x[4]=-2$；$x[5]=4$；…



3. 有一个**因果**的连续时间 LTI 系统，已知输入 $p(t)$ 时它的输出为 $q(t)$，$p(t)$ 和 $q(t)$ 的波形如下图所示。试求该系统的单位**阶跃响应** $s(t)$，并概画出它的波形。 **(14 分)**

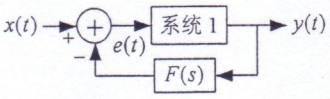


4. 已知如下方程和**起始条件** $y(0_-)=1$，$y'(0_-)=-1$ 表示的连续时间因果系统，试分别求出它对因果输入 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$ 的**零状态**响应 $y_{zs}(t)$、**零输入**响应 $y_{zi}(t)$ 和**稳态**响应 $y_{wt}(t)$。 **(12 分)**

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x(t)+\int_0^{\infty}x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

5. 有**两种不同**的方法可以借助**现成**的 N 点 FFT 程序、**直接**计算离散傅里叶变换的**逆变换(IDFT)**，试分别证明这两种方法，并相应地画出这两种用 N 点 FFT 程序、由 N 点 DFT 系数 $X[k]$ 直接计算出 N 点序列 $x[n]$，即 $x[n]=\mathrm{IDFT}\{X[k]\}$ 的**计算流图**。 **(12 分)**

6. 如右图所示**因果**连续时间线性反馈系统，已知系统 1 是用微分方程 $y'(t)-y(t)=e(t)$ 表示的 LTI 系统，反馈通路的系统函数为 $F(s)=K/(s+2)$，可调增益 K 为**任意实数**。试求：**(共 12 分)**



(1) 系统 1 的系统函数 $H_1(s)$，概画出其零、极点和收敛域，系统 1 稳定吗？ **(5 分)**

(2) 为保证整个反馈系统稳定，试求 $F(s)$ 中可调增益 K 的取值范围。 **(7 分)**

7. 有一个 **FIR** 数字滤波器，其单位冲激响应 $h[n]$ 见下表。试求： **(共 14 分)**

n	0	1	2	3	4	5	6	$n>6$
$h[n]$	0.05	0.30	0.75	1.0	0.75	0.30	0.05	0.00

(1) 它是什么类型(低通、高通、带通、全通和线性相位等)的滤波器？并**说明理由**； **(4 分)**

(2) 画出该滤波器的实现结构，要求结构中**只用三个数乘器**； **(5 分)**

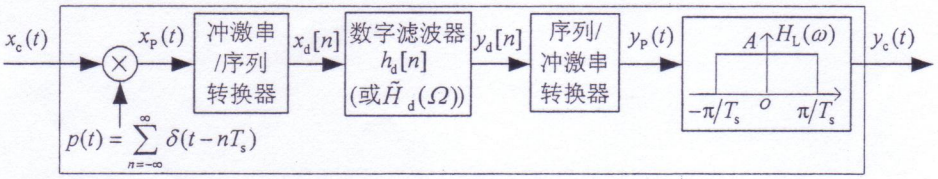
(3) 如果该滤波器的频率响应为 $\tilde{H}(\Omega)$(即 $H(e^{j\Omega})$)，试求频率响应为 $\tilde{H}(\Omega-\pi)$(即 $H(e^{j(\Omega-\pi)})$)的滤波器之单位冲激响应 $\tilde{h}[n]$，它又是什么类型(FIR、IIR、低通、高通、带通、全通和线性相位等)的数字滤波器？。 **(5 分)**

二、综合分析与计算题（每小题 30 分，共 60 分）

1. 在有多径传输的情况下，接收机收到的信号 $x_c(t)$ 可以模型为

$$x_c(t)=x(t)+\alpha x(t-T),\quad 0<\alpha<1$$

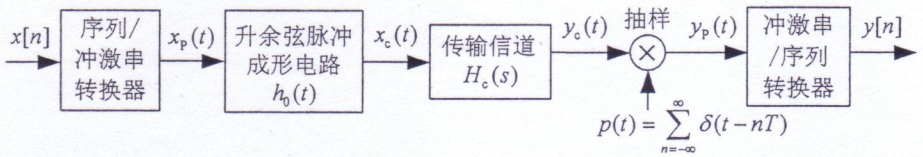
其中，$x(t)$ 是通过直达路径传输来的、带限于 ω_M 的信号，且 $\omega_M<\pi/T_s$，$\alpha x(t-T)$ 代表经历另一条路径传输来的信号，T 表示相对于直达路径的延时。可以通过下图所示的连续时间信号的离散时间处理来消除多径传输的影响，图中，$x_d[n]=x_c(nT_s)$，$y_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y_d[n]\delta(t-nT_s)$。



(1) 如果路径延时 $T<\pi/\omega_M$，为使 $y_c(t)=x(t-t_0)$，t_0 是一个延时。试选择抽样间隔 T_s，确定图中的数字滤波器的 $h_d[n]$ 和系统函数 $H_d(z)$)，画出它的滤波器实现结构(方框图或信号流图)及 $h_d[n]$ 的序列图形，并确定理想低通滤波器 $H_L(\omega)$ 增益 A。 **(14 分)**

(2) 如果路径延时 $T>\pi/\omega_M$，**例如** $2\pi/\omega_M<T<3\pi/\omega_M$，重做 1)小题。 **(16 分)**

2. 计算机通信中的数据传输系统可以等效成下图所示的数字信号的连续时间传输模型，图中：$x[n]$ 是数据信号，$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\delta(t-nT)$，$T$ 为数据位间隔，且右端的抽样间隔也是 T。现已知：**升余弦**成形电路的单位冲激响应为 $h_0(t)=0.5[1-\cos(\pi t/T)][u(t)-u(t-2T)]$；传输信道的系统函数为 $H_c(s)=(\pi/T)/[s+(\pi/T)]$；冲激串/序列转换输出为 $y[n]=y_c(nT)$。试求：



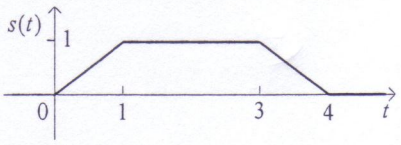
(1) 假设要传输的数据序列 $x[n]$ 是{1.5, 0, 1, 1, 0, 0, 2, …}，试概画出 $x_c(t)$ 的波形； **(6 分)**

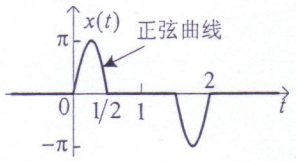
(2) **升余弦**成形电路的频率响应 $H_0(\omega)$，概画出它的幅频响应 $|H_0(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi_0(\omega)$ **(10 分)**

(3) 图示系统是有失真传输系统(即 $y[n]\neq x[n-n_0]$)，试说出导致失真的主要原因，它将产生哪些失真？分析它们对传输数据误差的影响程度，**分别**讨论**补偿**这些失真的方法，陈述你的方法，并给出所用**补偿系统**的特性(若是 LTI 系统，给出其单位冲激响应或频率响应)。除了你陈述的方法外，有否其它方法？并简述之。 **(14 分)**

一、基本分析和计算题（每小题分值由各小题标出，共 90 分）

1. 某连续时间 LTI 系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 和输入 $x(t)$ 见下图，必须用时域卷积方法求系统的输出 $y(t)$，并概画出它的波形。 **(14 分)**





解： 由图可知： $x(t)=x_0(t)-x_0(t-1.5)$

其中，$x_0(t)=\pi\{[\sin(2\pi t)u(t)+\sin 2\pi(t-0.5)u(t-0.5)]\}=\pi\sin(2\pi t)u(t)*[\delta(t)+\delta(t-0.5)]$ **(1 分)**

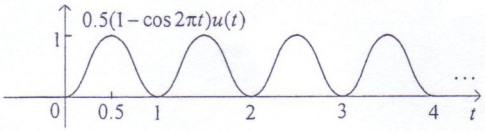
$h(t)=s'(t)=u(t)-u(t-1)-u(t-3)+u(t-4)=u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)-\delta(t-3)+\delta(t-4)]$ **(2 分)**

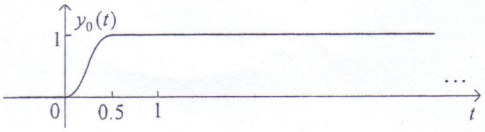
根据卷积的性质，该 LTI 系统的输出为

$$y(t)=x(t)*h(t)=[x_0(t)-x_0(t-1.5)]*u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)-\delta(t-3)+\delta(t-4)]$$
$$=[y_0(t)-y_0(t-1.5)]*[\delta(t)-\delta(t-1)-\delta(t-3)+\delta(t-4)]$$

其中，$y_0(t)=x_0(t)*u(t)$

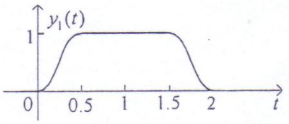
$$=\pi\sin(2\pi t)u(t)*u(t)*[\delta(t)+\delta(t-0.5)]$$
$$=\left[\int_{-\infty}^{t}\pi\sin(2\pi\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\right]*[\delta(t)+\delta(t-0.5)]$$
$$=\left[\int_{0}^{t}\pi\sin(2\pi\tau)\mathrm{d}\tau\right]u(t)*[\delta(t)+\delta(t-0.5)]$$
$$=0.5(1-\cos 2\pi t)u(t)*[\delta(t)+\delta(t-0.5)]$$
$$=\begin{cases}0, & t<0\\ 0.5(1-\cos 2\pi t), & 0\le t\le 0.5\\ 1, & t>0.5\end{cases}$$

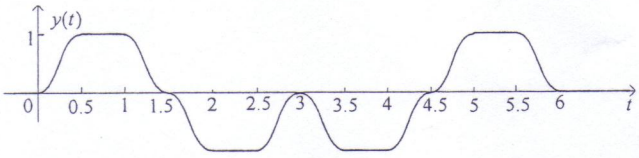




$y_0(t)$ 的波形如右图所示。**(6 分，其中波形 2 分)**

现令：$y_1(t)=[y_0(t)-y_0(t-1.5)]$，其波形见右图。最后得到





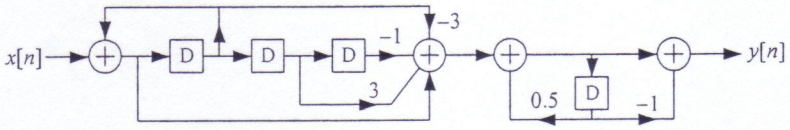
$$y(t)=y_1(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)-\delta(t-3)+\delta(t-4)]$$
$$=y_1(t)-y_1(t-1)-y_1(t-3)+y_1(t-4)$$

$y(t)$ 的波形如右图所示。**(5 分，其中波形 2 分)**

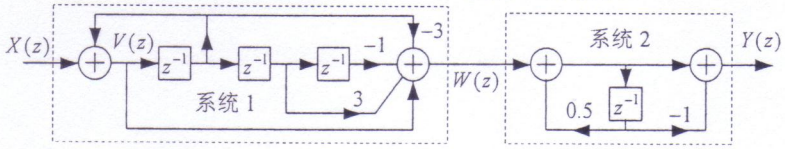
说明：解题的中间过程可以不同，中间的结果和波形也不一样，但 $y(t)$ 的波形必须相同。

2. 已知某个 **IIR** 数字滤波器的结构如下图所示，图中 **D** 为单位延时，试求其单位阶跃响应 $s[n]$，并计算在如下因果输入 $x[n]$ 时、滤波器输出 $y[n]$ 的前 **5** 个序列值。 **(12 分)**

$x[n]=0$，$n<0$；$x[0]=4$；$x[1]=2$；$x[2]=2$；$x[3]=-6$；$x[4]=-2$；$x[5]=4$；…



解：首先，求出该 **IIR** 数字滤波器的的差分方程表示。单位延时的系统函数为 z^{-1}，故该 **IIR** 数字滤波器的结构可画成下图。由图中看出，它是系统 1 和系统 2 的级联。



对于左边的系统 1，有如下关系：

$W(z)=V(z)-3V(z)z^{-1}+3V(z)z^{-2}-V(z)z^{-3}=V(z)(1-z^{-1})^3$ 和 $V(z)=X(z)+V(z)z^{-1}$

联立这两式可以得到：$W(z)=X(z)(1-z^{-1})^2$，或系统 1 的系统函数 $H_1(z)=(1-z^{-1})^2$ **（2 分）**

右边的系统 2 是离散时间一阶系统，它的系统函数为：$H_2(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$ **（1 分）**

该 **IIR** 数字滤波器的总系统函数为：$H(z)=H_1(z)H_2(z)=\dfrac{(1-z^{-1})^3}{1-0.5z^{-1}}=\dfrac{1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}}{1-0.5z^{-1}}$

它的差分方程表示为：$y[n]-0.5y[n-1]=x[n]-3x[n-1]+3x[n-2]-x[n-3]$ **（3 分）**

然后，用差分方程的递推算法求在给定因果输入 $x[n]$ 时、滤波器输出的前 5 个序列值。滤波器的后推方程为：$y[n]=x[n]-3x[n-1]+3x[n-2]-x[n-3]+0.5y[n-1]$。 **（1 分）**

则在本小题给定的因果输入 $x[n]$ 时，滤波器输出 $y[n]=0$，$n<0$，$y[n]$ 的**前 5 个**序列值计算如下：

当 $n=0$，$y[0]=x[0]-3x[-1]+3x[-2]-x[-3]+0.5y[-1]=x[0]=4$ **（1 分）**

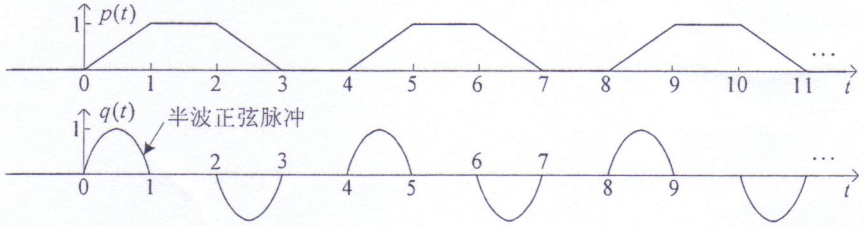
当 $n=1$，$y[1]=x[1]-3x[0]+3x[-1]-x[-2]+0.5y[0]=x[1]-3x[0]+0.5y[0]=-8$ **（1 分）**

当 $n=2$，$y[2]=x[2]-3x[1]+3x[0]-x[-1]+0.5y[1]=x[2]-3x[1]+3x[0]+0.5y[1]=4$ **（1 分）**

当 $n=3$，$y[3]=x[3]-3x[2]+3x[1]-x[0]+0.5y[2]=-8$ **（1 分）**

当 $n=4$，$y[4]=x[4]-3x[3]+3x[2]-x[1]+0.5y[3]=16$ **（1 分）**

3. 有一个因果的连续时间 LTI 系统，已知输入 $p(t)$ 时它的输出为 $q(t)$，$p(t)$ 和 $q(t)$ 的波形如下图所示。试求该系统的单位**阶跃响应** $s(t)$，并概画出它的波形。 **（14 分）**



解：由于只涉及因果信号和因果 LTI 系统，它们的单、双边拉普拉斯变换完全相同，且可以不留意收敛域。由波形图，$p(t)$ 和 $q(t)$ 可分别表示成：

$$p(t)=[tu(t)-(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)+(t-3)u(t-3)]*\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-4k)$$ **（1.5 分）**

$$q(t)=[\sin(\pi t)u(t)+\sin\pi(t-1)u(t-1)]*\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\delta(t-2k)$$ **（1.5 分）**

它们的像函数分别为

$$P(s)=\mathscr{L}\{p(t)\}=\frac{1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s}}{s^2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-4ks}=\frac{1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s}}{s^2(1-e^{-4s})}=\frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-2s})}$$ **（2 分）**

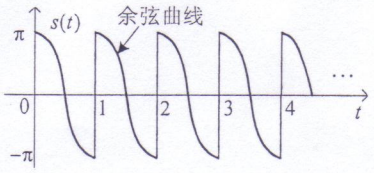
$$Q(s)=\mathscr{L}\{q(t)\}=\frac{\pi(1+e^{-s})}{s^2+\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-2ks}=\frac{\pi(1+e^{-s})}{(s^2+\pi^2)(1+e^{-2s})}$$ **（2 分）**

该因果 LTI 系统的系统函数为：$H(s)=\dfrac{Q(s)}{P(s)}=\dfrac{\pi s^2(1+e^{-s})}{(s^2+\pi^2)(1-e^{-s})}$ **（1 分）**

它的 $s(t)$ 的像函数为：$S(s)=\dfrac{H(s)}{s}=\dfrac{\pi s(1+\mathrm{e}^{-s})}{s^2+\pi^2}\cdot\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-s}}=\dfrac{\pi s}{s^2+\pi^2}(1+\mathrm{e}^{-s})\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-ks}$ （2 分）

则该因果 LTI 系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 为

$$s(t)=\mathscr{L}^{-1}\{S(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\pi s}{s^2+\pi^2}(1+\mathrm{e}^{-s})\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-ks}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\pi s(1+\mathrm{e}^{-s})}{s^2+\pi^2}\right\}*\mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-ks}\right\}$$



$$=\pi[\cos(\pi t)u(t)+\cos\pi(t-1)u(t-1)]*\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-k)$$ （2 分）

最后，$s(t)$ 的波形如左上图所示。 （2 分）

说明：也可用时域方法做，但 $y(t)$ 的波形必须相同。

4. 已知如下方程和**起始条件** $y(0_-)=1$，$y'(0_-)=-1$ 表示的连续时间因果系统，试分别求出它对因果输入 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$ 的**零状态**响应 $y_{zs}(t)$、**零输入**响应 $y_{zi}(t)$ 和**稳态**响应 $y_{wt}(t)$。 （12 分）

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x(t)+\int_0^{\infty}x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

解： 所给的微分方程可以改写为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x(t)+x(t)*u(t)$$ （1 分）

对上式的微分方程等号两边取单边拉普拉斯变换，且令 $Y(s)=\mathscr{L}_u\{y(t)\}$，则有

$$s^2Y(s)-y(0_-)s-y'(0_-)+3[sY(s)-y(0_-)]+2Y(s)=X(s)-X(s)/s$$

将此 $X(s)$ 和起始条件 $y(0_-)=1$，$y'(0_-)=0.5$ 代入上式并整理得到

$$Y(s)=\frac{1}{s(s+2)}X(s)+\frac{1}{s+1}$$ （3 分）

首先，零状态响应为 $Y_{zs}(s)=\dfrac{1}{s(s+2)}X(s)$，因 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，故将 $X(s)=1/(s+1)$ 代入得到

$$Y_{zs}(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$ （1 分）

并部分分式展开为 $$Y_{zs}(s)=\frac{0.5}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{0.5}{s+2}$$ （3 分）

故所求系统的零状态响应为： $$y_{zs}(t)=0.5u(t)-\mathrm{e}^{-t}u(t)+0.5\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$ （1 分）

然后，零输入响应的单边拉普拉斯变换像函数为：$Y_{uzi}(s)=\dfrac{1}{s+1}$，故系统的零输入响应为：

$$y_{zs}(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$$ （2 分）

最后，系统的稳态响应为 $$y_{wt}(t)=0.5u(t)$$ （1 分）

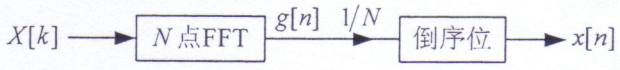
5. 有**两种不同**的方法可以借助**现成**的 N 点 FFT 程序、**直接**计算离散傅里叶变换的**逆变换(IDFT)**，试分别证明这两种方法，并相应地画出这两种用 N 点 FFT 程序、由 N 点 DFT 系数 $X[k]$ 直接计算其 N 点序列 $x[n]$，即 $x[n]=\mathrm{IDFT}\{X[k]\}$ 的**计算流图**。 （12 分）

解： N 点 DFT 和 IDFT 变换公式分别为

$$X[k]=\mathrm{DFT}\{x[n]\}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(2\pi/N)n},\quad k=0,\ 1\ \cdots\ N-1$$

$$x[n]=\mathrm{IDFT}\{X[k]\}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(2\pi/N)n},\quad n=0,\ 1\ \cdots\ N-1$$ （2 分）

方法 1： 先用 N 点 FFT 程序计算 $g[n]=\mathrm{FFT}\{X[k]\}$，再计算 $x[n]=(1/N)g[N-n]$，计算流图如下：



（2 分）

证明如下：因有 $g[n]=\mathrm{FFT}\{X[k]\}=\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(2\pi/N)n}$，则有

$$x[n]=\frac{1}{N}g[N-n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(2\pi/N)(N-n)}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(2\pi/N)n}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(2\pi/N)n}$$

这就是 N 点 DFT 变换公式，证毕。 **(3 分)**

方法 2：先用 N 点 FFT 程序计算 $g[n]=\mathrm{FFT}\{X^*[k]\}$，再计算 $x[n]=(1/N)g^*[n]$，计算流图如下：



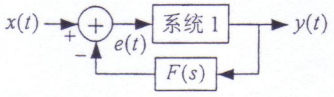
(2 分)

证明如下：因有 $g[n]=\mathrm{FFT}\{X^*[k]\}=\sum_{k=0}^{N-1}X^*[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(2\pi/N)n}$，则有

$$x[n]=\frac{1}{N}g^*[n]=\frac{1}{N}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}X^*[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(2\pi/N)n}\right\}^*=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(2\pi/N)n}$$

这就是 N 点 DFT 变换公式，证毕。 **(3 分)**

6. 如右图所示因果连续时间线性反馈系统，已知系统 1 是用微分方程 $y'(t)-y(t)=e(t)$ 表示的 LTI 系统，反馈通路的系统函数为 $F(s)=K/(s+2)$，可调增益 K 为**任意实数**。试求：**(共 12 分)**

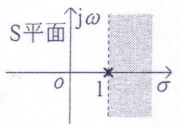


(1) 系统 1 的系统函数 $H_1(s)$，概画出其零、极点和收敛域，系统 1 稳定吗？ **(5 分)**

(2) 为保证整个反馈系统稳定，试求 $F(s)$ 中可调增益 K 的取值范围。 **(7 分)**

解：(1) 系统 1 的系统函数和收敛域为：$H_1(s)=\dfrac{1}{s-1}$，$\mathrm{Re}\{s\}>1$

它有一阶极点 $p=1$，收敛域不包含虚轴，见右图，故系统不稳定。 **(5 分)**



(2) 图示线性反馈系统的系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s)F(s)}=\frac{\dfrac{1}{s-1}}{1+\dfrac{K}{(s-1)(s+2)}}=\frac{s+2}{s^2+s+(K-2)}$$ **(3 分)**

它有两个极点 p_1 和 p_2，它们即为分母多项式的两个根，即 $p_{1,2}=-0.5\pm0.5\sqrt{9-4K}$ **(2 分)**

如果这两个极点落在虚轴以左的左半个 S 平面，即 $\mathrm{Re}\{p_{1,2}\}<0$，因果的线性反馈系统的收敛域包含虚轴，系统就是稳定系统。为确保这一点，必须使 $(9-4K)<1$，即 $K>2$。

因此，为确保线性反馈系统稳定，可调增益 K 的取值范围为：$2<K<+\infty$ **(2 分)**

7. 有一个 **FIR** 数字滤波器，其单位冲激响应 $h[n]$ 见下表。试求： **(共 14 分)**

n	0	1	2	3	4	5	6	$n>6$
$h[n]$	0.05	0.30	0.75	1.0	0.75	0.30	0.05	0.00

(1) 它是什么类型(低通、高通、带通、全通和线性相位等)的滤波器？并**说明理由**； **(4 分)**

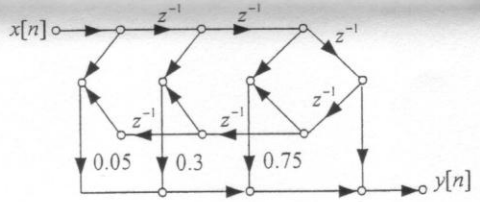
(2) 画出该滤波器的实现结构，要求结构中**只用三个数乘器**； **(5 分)**

(3) 如果该滤波器的频率响应为 $\tilde{H}(\Omega)$(即 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$)，试求频率响应为 $\tilde{H}(\Omega-\pi)$(即 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\pi)})$)的滤波器之单位冲激响应 $\tilde{h}[n]$，它又是什么类型(FIR、IIR、低通、高通、带通、全通和线性相位等)的数字滤波器？。 **(5 分)**

解：(1) 由于该 7 点 FIR 滤波器的 $h[n]\geq0$，$0\leq n]\leq6$，故它是一个数字低通滤波器。 **(2 分)**

其单位冲激响应又满足中心偶对称，即 $h[N-n]=h[n]$，故是线性相位的滤波器。 **(2 分)**

(2) 由于它是 $h[N-n]=h[n]$ 的线性相位 FIR 滤波器，故可省去约一半的数乘器，它的信号流图形式的线性相位 FIR 滤波器结构图如右图所示(也可以用三种基本离散时间单元的方框图表示)。由于 $h[4]=1$，故图中只用三个数乘器。 (5 分)



(3) 根据离散时间傅里叶变换频移 π 的性质，则有

$$\hat{h}[n]=\mathscr{F}^{-1}\{\tilde{H}(\Omega-\pi)\}=(-1)^n h[n]$$

它的序列值见下表。 (3 分)

n	0	1	2	3	4	5	6	$n>6$
$h[n]$	0.05	−0.30	0.75	−1.0	0.75	−0.30	0.05	0.00

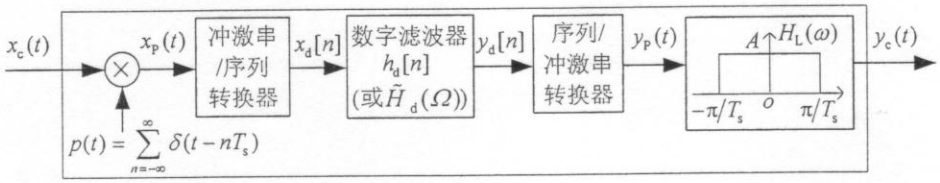
显然，它是 FIR 线性相位高通数字滤波器。 (2 分)

二、综合分析与计算题（每小题 30 分，共 60 分）

1. 在有多径传输的情况下，接收机收到的信号 $x_c(t)$ 可以模型为

$$x_c(t)=x(t)+\alpha x(t-T),\quad 0<\alpha<1$$

其中，$x(t)$ 是通过直达路径传输来的、带限于 ω_M 的信号，且 $\omega_M<\pi/T_s$，$\alpha x(t-T)$ 代表经历另一条路径传输来的信号，T 表示相对于直达路径的延时。可以通过下图所示的连续时间信号的离散时间处理来消除多径传输的影响，图中，$x_d[n]=x_c(nT_s)$，$y_P(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d[n]\delta(t-nT_s)$。



(1) 如果路径延时 $T<\pi/\omega_M$，为使 $y_c(t)=x(t-t_0)$，t_0 是一个延时。试选择抽样间隔 T_s，确定图中的数字滤波器的 $h_d[n]$ 和系统函数 $H_d(z)$)，画出它的滤波器实现结构(方框图或信号流图)及 $h_d[n]$ 的序列图形，并确定理想低通滤波器 $H_L(\omega)$ 增益 A。 (14 分)

(2) 如果路径延时 $T>\pi/\omega_M$，例如 $2\pi/\omega_M<T<3\pi/\omega_M$，重做 1)小题。 (16 分)

解： (1) 首先，由于 $x_c(t)$ 是带限信号 $x(t)$ 与其衰减时移信号之和，故它与 $x(t)$ 同属带限信号，带限频率为 ω_M，因此，当路径延时 $T<\pi/\omega_M$ 时，为满足抽样定理，选择其最大的抽样间隔为

$$T_s=T。$$ (2 分)

在 $T_s=T$ 时，图示系统中分别有

$$x_P(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(nT)+\alpha x(nT-T)]\delta(t-nT)$$ (1 分)

和 $x_d[n]=x_c(nT_s)=x[n]+\alpha x[n-1]$，其中 $x[n]=x(nT)$ (1 分)

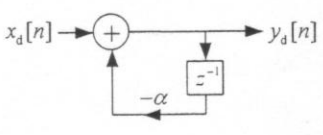
如果图中作为离散时间处理的数字滤波器的输出 $y_d[n]=x[n]$，图中的 $y_P(t)$ 就为

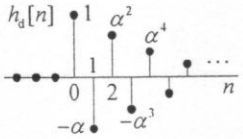
$$y_P(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d[n]\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT_s)$$

根据抽样定理，只要理想带限内插滤波器 $H_L(\omega)$ 的增益 $A=T_s=T$ 时，它的输出是 $y_c(t)=x(t-t_0)$。即将无失真地重建信号 $x(t)$。因此，为使 $y_c(t)=x(t-t_0)$，数字滤波器的输入输出关系应为

$$y_d[n]+\alpha y_d[n-1]=x_d[n]$$ (4 分)

它是一阶 IIR 数字滤波器，它的单位冲激响应 $h_d[n]$ 和系统函数 $H_d(z)$ 分别为





$h_d[n]=(-\alpha)^n u[n]$ 和 $H_d(z)=\dfrac{1}{1+\alpha z^{-1}}$ (2 分)

$h_d[n]$的序列图形和该滤波器实现结构分别如右上图所示。 (3 分)

理想低通滤波器 $H_L(\omega)$ 增益 $A=T$。 (1 分)

(2) 当路径延时 T 的范围为 $2\pi/\omega_M<T<3\pi/\omega_M$ 时，为满足抽样定理，不能再取 $T_s=T$，而应选择的最大抽样间隔为 $T_s=T/3$，此时 $T_s<\pi/\omega_M$，满足抽样定理。 (2 分)

在 $T_s=T/3$ 时，图示系统中分别有

$$x_P(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_c(nT_s)\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(nT_s)+\alpha x(nT_s-3T_s)]\delta(t-nT_s)$$ (1 分)

和 $x_d[n]=x_c(nT_s)=x[n]+\alpha x[n-3]$，其中 $x[n]=x(nT)$ (1 分)

同样地，如果图中作为离散时间处理的数字滤波器的输出 $y_d[n]=x[n]$，图中的 $y_P(t)$ 就为

$$y_P(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y_d[n]\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\delta(t-nT_s)$$

根据抽样定理，只要理想带限内插滤波器 $H_L(\omega)$ 的增益 $A=T_s$ 时，它的输出是 $y_c(t)=x(t-t_0)$。即将无失真地重建信号 $x(t)$。因此，为使 $y_c(t)=x(t-t_0)$，数字滤波器的输入输出关系应为

$$y_d[n]+\alpha y_d[n-3]=x_d[n]$$ (4 分)

它是三阶 IIR 数字滤波器，它的系统函数 $H_d(z)$ 为

$$H_d(z)=\frac{1}{1+\alpha z^{-3}}$$ (1 分)

该滤波器实现结构如左下图所示。 (2 分)

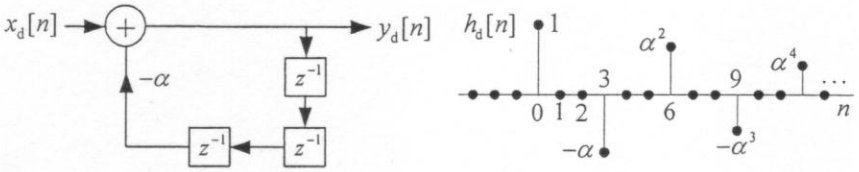
根据内插零的 Z 变换关系，即若 $f[n]\xleftrightarrow{Z}\{F(z),\ R_F=(r_1<|z|<r_2)\}$，则有

$$f_{(M)}[n]=\begin{cases}f[n/M], & n=lM\\ 0, & n\neq lM\end{cases}\xleftrightarrow{Z}\{F(z^M),\ R_F^{1/M}=(r_1^{1/M}<|z|<r_2^{1/M})\}$$

上面的 $H_d(z)$ 可写成 $H_d(z)=H(z^3)$，其中，$H(z)=\dfrac{1}{1+\alpha z^{-1}}$，其反 Z 变换为 $h[n]=(-\alpha)^n u[n]$。因此，该三阶 IIR 数字滤波器的单位冲激响应 $h_d[n]=h_{(3)}[n]$，即

$$h_d[n]=\begin{cases}(-\alpha)^{n/3}u[n/3], & n=3l\\ 0, & n\neq 3l\end{cases},\quad l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$$ (3 分)

它的序列图形如右下图所示。 (1 分)

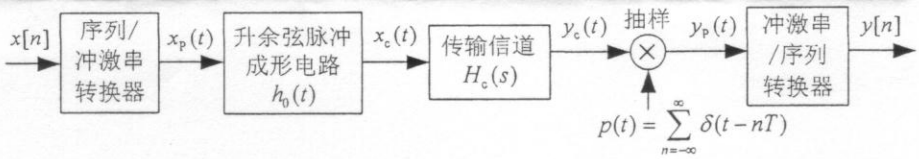


理想低通滤波器 $H_L(\omega)$ 增益 $A=T_s=T/3$。 (1 分)

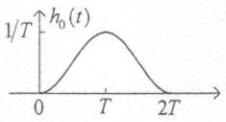
2. 计算机通信中的数据传输系统可以等效成下图所示的数字信号的连续时间传输模型，图中：$x[n]$是数据信号，$x_P(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\delta(t-nT)$，$T$ 为数据位间隔，且右端的抽样间隔也是 T。现已知：升余弦成形电路的单位冲激响应为 $h_0(t)=0.5[1-\cos(\pi t/T)][u(t)-u(t-2T)]$；传输信道的系统函数为 $H_c(s)=(\pi/T)/[s+(\pi/T)]$；冲激串/序列转换输出为 $y[n]=y_c(nT)$。试求：

(1) 假设要传输的数据序列 $x[n]$ 是{1.5, 0, 1, 1, 0, 0, 2, …}，试概画出 $x_c(t)$ 的波形； (6 分)

(2) 升余弦成形电路的频率响应 $H_0(\omega)$，概画出它的幅频响应 $|H_0(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi_0(\omega)$ (10 分)



(3) 图示系统是有失真传输系统(即 $y[n]\neq x[n-n_0]$)，试说出导致失真的主要原因，它将产生哪些失真？分析它们对传输数据误差的影响程度，分别讨论补偿这些失真的方法，请陈述你的方法，并给出所用补偿系统的特性(若是 LTI 系统，给出其单位冲激响应或频率响应)。除了你陈述的方法外，有否其它方法？并简述之。 **(14 分)**



解：(1) 升余弦形成电路输出信号 $x_c(t)$ 为

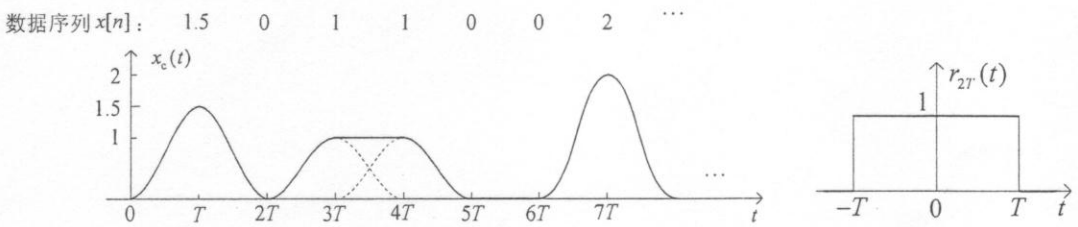
$$x_c(t)=x_P(t)*h_0(t)=h_0(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]h_0(t-nT) \quad \textbf{(2 分)}$$

其中，$h_0(t)=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\right][u(t)-u(t-2T)]$，它的波形如右上图所示。 **(1 分)**

故当数据序列 $x[n]$ 为 {1.5, 0, 1, 1, 0, 0, 2, …} 时，$x_c(t)$ 为

$$x_c(t)=1.5h_0(t)+h_0(t-2T)+h_0(t-3T)+2h_0(t-6T)+\cdots \quad \textbf{(1 分)}$$

它的波形如下图所示。 **(2 分)**



(2) 由 $h_0(t)$ 的波形看出，它又可以表示成 $h_0(t)=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\right]r_{2T}(t)*\delta(t-T)$，其中，$r_{2T}(t)$ 的波形如右上图所示。升余弦形成电路的频率响应 $H_0(\omega)$ 为

$$H_0(\omega)=\mathcal{F}\{h_0(t)\}=\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\right]r_{2T}(t)*\delta(t-T)\right\} \quad \textbf{(2 分)}$$

基于如下一些熟知的傅里叶变换：

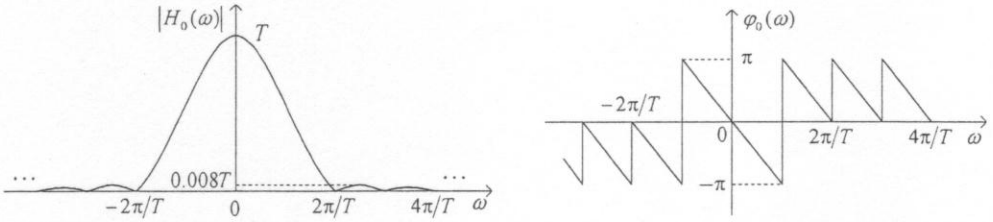
$$\mathcal{F}\{1\}=2\pi\delta(\omega),\quad \mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\}=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)],\quad \mathcal{F}\{r_{2T}(t)\}=2T\mathrm{Sa}(\omega T)=2T\frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$

并根据傅里叶变换的频域卷积性质，则上面的 $H_0(\omega)$ 进一步为

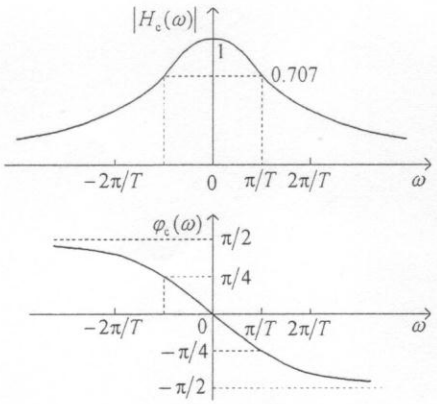
$$H_0(\omega)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}\left\{2\pi\delta(\omega)+\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{\pi}{T}\right)+\delta(\omega-\frac{\pi}{T})\right]\right\}*2TSa(\omega T)$$

$$=T\left\{\mathrm{Sa}(\omega\tau)+\frac{1}{2}\mathrm{Sa}\left[\left(\omega+\frac{\pi}{T}\right)T\right]+\frac{1}{2}\mathrm{Sa}\left[\left(\omega-\frac{\pi}{T}\right)T\right]\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T} \quad \textbf{(4 分)}$$

它的幅频响应 $|H_0(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi_0(\omega)$ 分别如下图所示。 **(4 分)**



(3) 由上面$|H_0(\omega)|$的图形看出，它的最大旁瓣的幅度是主瓣幅度的0.008，完全可以忽略，故它可看成带限频率为$\omega_M=2\pi/T$的低通滤波器，$x_c(t)$也可看成带限于$\omega_M=2\pi/T$的带限信号。**(2分)**



由于传输信道的系统函数是$H_c(s)=\dfrac{\pi/T}{s+(\pi/T)}$，其频率响应为$H_c(\omega)=\dfrac{\pi/T}{j\omega+\pi/T}$，它是一阶低通滤波器，-3dB截止频率$\omega_c=\pi/T$，其幅频响应$|H_c(\omega)|$和相频响应$\varphi_c(\omega)$如右下图所示。 **(3分)**

由右图看出，它在$x_c(t)$的信号带限频带内，幅频响应不是常数，相频响应也非线性，因此信道输出$y_c(t)$将既有幅度频率失真，又会产生相位频率失真，这都会导致传输数据的差错，即$y[n]\neq x[n-n_0]$。 **(2分)**

如果传输信道是在频带$|\omega|\le 2\pi/T$内幅频响应等于1、延时为n_0T（n_0为正整数)的低通信道，即

$$\hat{H}_c(\omega)=e^{-j\omega n_0T},\quad |\omega|\le 2\pi/T$$

则$x_c(t)$通过它的输出$y_c(t)=x_c(t-n_0T)$，将保证最终的输出数据$y[n]=x[n-n_0]$。由此，可在题图中传输信道$H_c(s)$后级联一个均衡器$H_e(\omega)$，使得$H_c(\omega)H_e(\omega)=\hat{H}_c(\omega)$，即设计一个连续时间均衡器，它的频率响应$H_e(\omega)$应为

$$H_e(\omega)=\frac{\hat{H}_c(\omega)}{H_c(\omega)}=\frac{j\omega+\pi/T}{\pi/T}e^{-j\omega n_0T},\quad |\omega|\le 2\pi/T$$

由传输信道的相频响应图可以看出，它的延时$\tau\le T/4$，故上式中的n_0取值可以是1，即设计的均衡器的幅频响应$|H_e(\omega)|$和相频响应$\varphi_e(\omega)$分别为

$$|H_e(\omega)|=\frac{\sqrt{\omega^2+(\pi/T)^2}}{\pi/T},\ |\omega|\le 2\pi/T \quad 和 \quad \varphi_e(\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)-\omega T,\ |\omega|\le 2\pi/T \qquad \textbf{(5分)}$$

除了上述连续时间幅度和相位均衡器的方法外，还可以采用如下的方法，即在传输信道$H_c(s)$后级联一个连续时间相位均衡器，它在带内的幅频响应等于1，相频响应为上面求得的$\varphi_e(\omega)$；以确保抽样点正确采样；然后在最终的输出端用一个数字均衡器，均衡所遭受的幅度频率失真。 **(2分)**

说明：在题图中的抽样间隔等于数据位间隔T，是实际采样判决电路所要求的，故不存在T不满足抽样定理的问题，本题也就不存在混叠失真，如回答由混叠失真的，应扣2分。

http://blog.sina.com.cn/u/1259850285 taobao.com/u/1259850285

2009 年硕士学位研究生入学考试试题

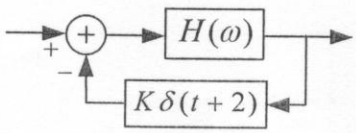
信号与系统

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

说明：请看清每题的要求，特别注意黑体字。若结果是实函数，必须写出实函数表达式；按题意要求画出的函数图形，必须有必要的坐标标注。不需要使用计算器。

一、某个连续时间**因果** LTI 系统的频率响应为 $H(\omega)=\dfrac{(\mathrm{j}\omega-2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{6-\omega^2+\mathrm{j}5\omega}$，试求：（**共 40 分**）

1. 请给出该系统的系统函数，画出它的零极点图和收敛域。（5 分）
2. 给出该系统的微分方程描述，并概略画出系统的幅频响应 $|H(\omega)|$。（6 分）
3. 系统单位阶跃响应 $s(t)$，并概略画出其波形。（10 分）
4. 当该系统的输入信号为 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 时，必须用**时域方法**求系统的输出信号 $y(t)$，**若用变换域方法做本小题将不给分**。（8 分）
5. 写出该系统的一个延时的**因果**逆系统的系统函数 $H_{\mathrm{Inv}}(s)$（即要求 $h(t)*h_{\mathrm{Inv}}(t)=\delta(t-t_0)$，其中 t_0 为正实数），确定其收敛域，判断是否稳定。（6 分）
6. 该系统与单位参加响应为 $K\delta(t+2)$ 的 LTI 系统构成如题图 1 所示的反馈系统，请给出该反馈系统的系统函数。（5 分）



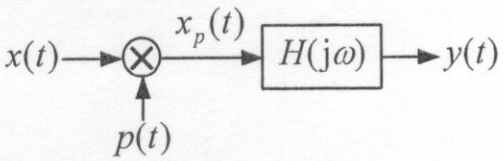
题图 1

二、求解下列两个小题：（**共 20 分**）

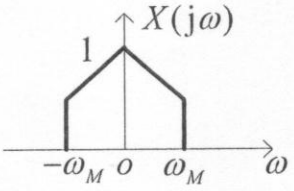
1. 已知 $f[n]=x[n]\cos(\pi n/4)$，其离散时间傅里叶变换为 $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\begin{cases}1, & |\Omega|<\pi/2\\ 0, & \pi/2<|\Omega|\le\pi\end{cases}$，在 Ω 的主值区间 $(-\pi,\ \pi)$ 内。试确定序列 $x[n]$，并概画出其序列图形。（10 分）
2. 试求由差分方程 $y[n]-(3/2)y[n-1]+(1/2)y[n-2]=x[n]+\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 和起始条件 $y[-1]=1$，$y[-2]=2$ 表征的离散时间因果系统，$x[n]=(1/2)^n u[n]$ 时，系统的输出 $y[n]$，$n\ge 0$。并写出其中的零输入响应 $y_{zi}[n]$ 和零状态响应 $y_{zs}[n]$。（10 分）

三、考虑如题图 3 (a)所示的连续时间系统。$x(t)$ 为带限信号，其频谱如题图 3 (b)所示。$p(t)$ 为周期三角脉冲信号，其周期为 T_s，脉宽为 τ，如题图 3 (c)所示。（**共 20 分**）

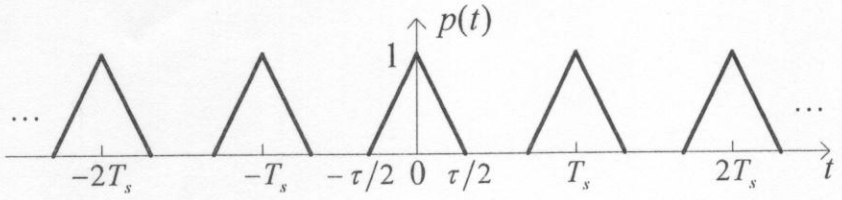
http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089



题图 3 (a)



题图 3 (b)

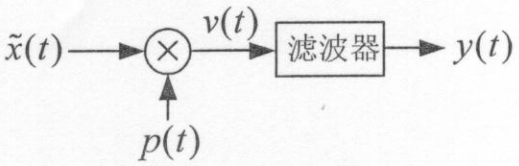


题图 3 (c)

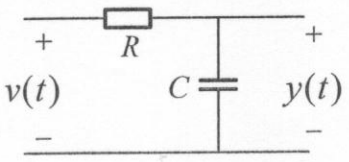
1. 试求相乘器输出的信号 $x_p(t)$ 的频谱 $X_p(j\omega)$，并概略画出该频谱图形。（14 分）
2. 如果使用低通滤波器 $H(j\omega)$，从信号 $x_p(t)$ 中无失真地恢复原输入信号 $x(t)$，那么周期脉冲信号 $p(t)$ 应该满足什么条件？并确定 $H(j\omega)$ 的特性。（6 分）

四、 周期为 T 的实周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的指数形式的傅里叶级数和三角傅里叶级数分别表示为

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad 和 \quad \tilde{x}(t)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t+\theta_k\right)$$



题图 4 (a)



题图 4 (b)

采用题图 4 (a)的系统来获得已知实周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的各次谐波的幅度 c_k 和初相位 θ_k，$k=1,2,\cdots$。图中，滤波器的单位冲激响应 $h(t)=\dfrac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}$。试求：（**共 25 分**）

1. 当 $p(t)=\cos[k(2\pi/T)t]$ 和 $p(t)=\sin[k(2\pi/T)t]$ 时，分别画出 $\tilde{x}(t)$ 和 $v(t)$ 的频谱，并分别求出这两种情况下题图 4 (a)所示系统的输出 $y(t)$。（10 分）
2. 根据 1. 小题的结果，设计能分别获得实周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的 k 次谐波的幅度 c_k 和初相位 θ_k，$k=1,2,3\cdots$，的系统，并画出系统框图。（8 分）
3. 如果题图 4 (a)中的滤波器换成题图 4 (b)所示的一阶 RC 低通滤波器，将对 2. 小题设计结果产生什么影响；若要使设计的系统仍希望获得较精确的 c_k 和 θ_k 的值，RC 低通滤波器的时间常数 $\tau=RC$ 的选择应有什么考虑。（7 分）

http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089

五、数字滤波是最常用的数字信号处理方法，对于 IIR 和 FIR 这两种数字滤波器，**有效地**实现无限长数字信号 $x[n]$，$n=0,1,2\cdots$，的滤波方法是不相同的。（**共 25 分**）

1. 对于 IIR 滤波器，若已知滤波器的系统函数 $H_d(z)=\dfrac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}}$，试写出计算无限长数字信号 $x[n]$ 通过该 IIR 滤波器的输出信号 $y[n]$，$n=0,1,2\cdots$，的计算公式，以及用三种计算单元(数字相加器、数乘器和单位延时器)的实现框图。（10 分）

2. 对于 FIR 滤波器，通常采用 FFT 程序的快速卷积(或称频域滤波)方法来实现 $x[n]$ 的数字滤波。若已知 FIR 滤波器的单位冲激响应 $h_d[n]=\sum_{k=0}^{15}h_k\delta[n-k]$，试画出采用 128 点 FFT 程序，分段计算无限长数字信号 $x[n]$ 通过该 FIR 滤波器的输出信号 $y[n]$，$n=0,1,2,\cdots$，的实现框图；并分别说明采用**重叠相加法**和**重叠保留法**的快速卷积方法来计算输出信号 $y[n]$ 时，对 $x[n]$ 是如何分段的，又如何从每个分段滤波结果**连接成**无限长的 $y[n]$。（15 分）

六、加窗是数字信号处理中常见的操作。汉宁窗是一种常见窗序列，其偶对称表示式为：

$$w[n]=\begin{cases}\cos^2\left(\dfrac{n}{N}\pi\right), & n=-\dfrac{N}{2},\cdots,-1,0,1,\cdots,\dfrac{N}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

，其中 N 为偶的正整数。（**共 20 分**）

1. 试确定该汉宁窗的频谱函数 $W(e^{j\Omega})$。（10 分）
2. 如果把该汉宁窗的频谱函数表达为 $W(e^{j\Omega})=W(\Omega)e^{-j\Omega\alpha}$，其中 $W(\Omega)$ 为实函数。试概略画出 $W(\Omega)$ 的图形。（5 分）
3. 在实际的数字信号处理中，通常使用的是单边的汉宁窗，其表示式是 $w[n]=\sin^2(n\pi/N)$，$n=0,1,\cdots,N-1$，其中 N 为偶的正整数。对序列 $x[n]$ 进行汉宁窗 $w[n]$ 加权后的离散傅里叶变换为 $X_W[k]=\sum_{n=0}^{N-1}w[n]x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$。

   试证明，计算 $X_W[k]$，完全可以省略掉 $x[n]$ 与 $w[n]$ 的相乘运算，而直接计算 $x[n]$ 的 DFT 变换 $X[k]$，然后通过对 $X[k]$ 序列进行线性组合来得到 $X_W[k]$。（5 分）

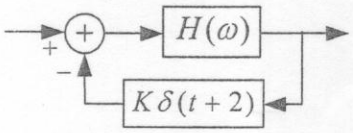
http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089

2009 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

信号与系统

一、某个连续时间因果 LTI 系统的频率响应为 $H(\omega)=\dfrac{(\mathrm{j}\omega-2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{6-\omega^2+\mathrm{j}5\omega}$，试求：（共 40 分）

1. 请给出该系统的系统函数，画出它的零极点图和收敛域；（5 分）
2. 给出该系统的微分方程描述，并概略画出系统的幅频响应 $|H(\omega)|$。（6 分）
3. 系统单位阶跃响应 $s(t)$，并概略画出其波形。（10 分）
4. 当该系统的输入信号为 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 时，必须用**时域方法**求系统的输出信号 $y(t)$，**若用变换域方法做本小题将不给分**。（8 分）
5. 写出该系统的一个延时的因果逆系统的系统函数 $H_{\mathrm{inv}}(s)$（即要求 $h(t)*h_{\mathrm{inv}}(t)=\delta(t-t_0)$，其中 t_0 为正实数），确定其收敛域，判断是否稳定。（6 分）
6. 该系统与单位参加响应为 $K\delta(t+2)$ 的 LTI 系统构成如题图 1 所示的反馈系统，请给出该反馈系统的系统函数；（5 分）



题图 1

解： 1. 该系统的系统函数 $H(s)=\dfrac{(s-2)e^{-2s}}{s^2+5s+6}$ （2 分）

该系统的零极点图和收敛域如图 1.1 所示。（3 分）

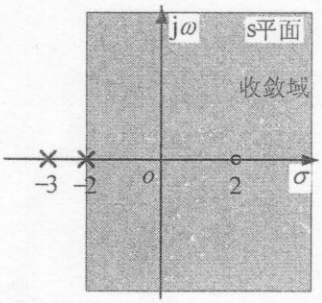


图 1.1

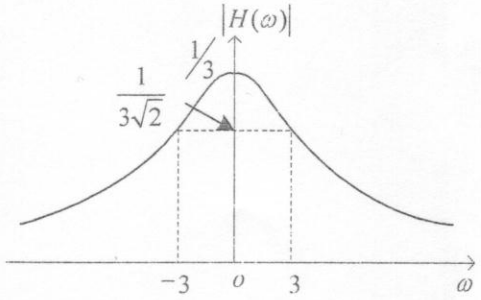


图 1.2

2. 该系统的微分方程描述为：$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x'(t-2)-2x(t-2)$ （2 分）

该系统的幅频响应 $|H(\omega)|=\left|\dfrac{(\mathrm{j}\omega-2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{6-\omega^2+\mathrm{j}5\omega}\right|=\left|\dfrac{\mathrm{j}\omega-2}{(\mathrm{j}\omega+2)(\mathrm{j}\omega+3)}\right|=\left|\dfrac{\mathrm{j}\omega-2}{\mathrm{j}\omega+2}\right|\times\left|\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega+3}\right|$

由于 $\left|\dfrac{\mathrm{j}\omega-2}{\mathrm{j}\omega+2}\right|=1$ 为全通系统的幅频响应，故 $|H(\omega)|=\left|\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega+3}\right|$。（2 分）

其幅频响应曲线如图 1.2 所示。（2 分）

http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089

3．可用多种方法求系统的单位阶跃响应 $s(t)$：

方法 1：$H(s)=H_0(s)e^{-2s}$，其中 $H_0(s)=\dfrac{s-2}{(s+2)(s+3)}$，则 $S_0(s)=\dfrac{H_0(s)}{s}=\dfrac{s-2}{s(s+2)(s+3)}$

它可以部分分式展开：$S_0(s)=\dfrac{H_0(s)}{s}=\dfrac{-1/3}{s}+\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{-5/3}{s+3}$ （4 分）

则 $s_0(t)=-\dfrac{1}{3}u(t)+2e^{-2t}u(t)-\dfrac{5}{3}e^{-3t}u(t)$

故 $s(t)=s_0(t-2)=-\dfrac{1}{3}u(t-2)+2e^{-2(t-2)}u(t-2)-\dfrac{5}{3}e^{-3(t-2)}u(t-2)$ （3 分）

$s(t)$ 的波形如图 1.3 所示。 （3 分）

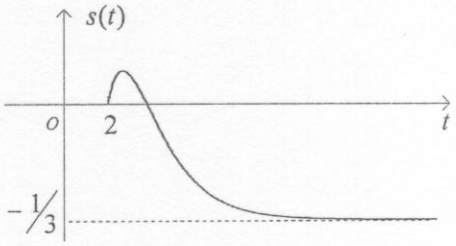


图 1.3

方法 2：$H(s)=H_0(s)e^{-2s}$，其中 $H_0(s)=\dfrac{s-2}{(s+2)(s+3)}$

$$h_0(t)=L^{-1}\{H_0(s)\}=L^{-1}\{\frac{s-2}{(s+2)(s+3)}\}=L^{-1}\{\frac{-4}{s+2}+\frac{5}{s+3}\}=-4e^{-2t}u(t)+5e^{-3t}u(t)$$

$$h(t)=L^{-1}\{H_0(s)e^{-2s}\}=h_0(t-2)=-4e^{-2(t-2)}u(t-2)+5e^{-3(t-2)}u(t-2)$$ （3 分）

$$s(t)=h(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}(-4e^{-2(\tau-2)}u(\tau-2)+5e^{-3(\tau-2)}u(\tau-2))d\tau$$

$$=[\int_{2}^{t}(-4e^{-2(\tau-2)}+5e^{-3(\tau-2)})d\tau]u(t-2)$$

$$=-\frac{1}{3}u(t-2)+2e^{-2(t-2)}u(t-2)-\frac{5}{3}e^{-3(t-2)}u(t-2)$$

（4 分）

$s(t)$ 的波形如图 1.3 所示。 （3 分）

4．可用多种**时域方法**求系统的输出信号 $y(t)$：**若用变换域方法做本小题将不给分**

方法 1：$y(t)=x(t)*h(t)$

当输入信号为 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 时

http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089

$$y(t)=(u(t)-u(t-2))*h(t)=u(t)*h(t)-u(t-2)*h(t)$$
$$=s(t)-s(t-2)$$

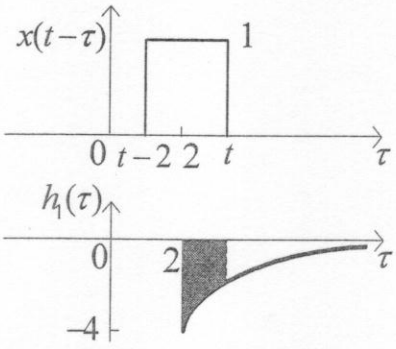
（4 分）

$$y(t)=[-\frac{1}{3}u(t-2)+2e^{-2(t-2)}u(t-2)-\frac{5}{3}e^{-3(t-2)}u(t-2)]$$
$$-[-\frac{1}{3}u(t-4)+2e^{-2(t-4)}u(t-4)-\frac{5}{3}e^{-3(t-4)}u(t-4)]$$
$$=-\frac{1}{3}[u(t-2)-u(t-4)]+2e^{-2(t-2)}[u(t-2)-e^{4}u(t-4)]$$
$$-\frac{5}{3}e^{-3(t-2)}[u(t-2)-e^{6}u(t-4)]$$

（4 分）

方法 2：

先利用 4. 小题方法 2 中的步骤求单位冲激响应 $h(t)$。



$$h(t)=-4e^{-2(t-2)}u(t-2)+5e^{-3(t-2)}u(t-2)=h_1(t)+h_2(t)$$

$$h_1(t)=-4e^{-2(t-2)}u(t-2) \qquad h_2(t)=5e^{-3(t-2)}u(t-2)$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

$y_1(t)=x(t)*h_1(t)$ 的卷积过程如右图所示。

（4 分）

$$y_1(t)=x(t)*h_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\tau)x(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0, & t<2\\ 2[e^{-2(t-2)}-1], & 2\le t<4\\ 2[e^{-2(t-2)}-e^{-2(t-4)}], & t\ge 4\end{cases}$$

$$y_2(t)=x(t)*h_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h_2(\tau)x(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0, & t<2\\ -\frac{5}{3}[e^{-3(t-2)}-1], & 2\le t<4\\ -\frac{5}{3}[e^{-3(t-2)}-e^{-3(t-4)}], & t\ge 4\end{cases}$$

则 $y(t)=y_1(t)+y_2(t)=\begin{cases}0, & t<2\\ 2[e^{-2(t-2)}-1]-\frac{5}{3}[e^{-3(t-2)}-1], & 2\le t<4\\ 2[e^{-2(t-2)}-e^{-2(t-4)}]-\frac{5}{3}[e^{-3(t-2)}-e^{-3(t-4)}], & t\ge 4\end{cases}$

（4 分）

或 $y(t)=-\frac{1}{3}[u(t-2)-u(t-4)]+2e^{-2(t-2)}[u(t-2)-e^{4}u(t-4)]-\frac{5}{3}e^{-3(t-2)}[u(t-2)-e^{6}u(t-4)]$

http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089

5. $h(t)*h_{\text{Inv}}(t)=\delta(t-t_0)$，$t_0$ 为正实数，故 $H_{\text{Inv}}(s)=\dfrac{1}{H(s)}e^{-st_0}$，$H(s)=\dfrac{(s-2)e^{-2s}}{s^2+5s+6}$

则 $H_{\text{Inv}}(s)=\dfrac{(s+2)(s+3)}{s-2}$ （2 分）

又因为 $H_{\text{Inv}}(s)$ 是因果逆系统，所以其收敛域为：$\text{Re}\{s\}>2$ （2 分）

由于该逆系统的收敛域不包含 s 平面的虚轴，故 $H_{\text{Inv}}(s)$ 系统不稳定。 （2 分）

6. 反馈系统的系统函数 $Q(s)$ 求解过程为：$[x(t)-y(t)*K\delta(t+2)]*h(t)=y(t)$

$y(t)*[\delta(t)+K\delta(t+2)*h(t)]=x(t)*h(t)$，两边同时做 Laplace 变换：

$Y(s)[1+Ke^{2s}H(s)]=X(s)H(s)$，那么反馈系统的系统函数 $Q(s)$：

$$Q(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H(s)}{1+Ke^{2s}H(s)}=\frac{(s-2)e^{-2s}}{(s+2)(s+3)}\Big/[1+Ke^{2s}\frac{(s-2)e^{-2s}}{(s+2)(s+3)}]$$

$$=\frac{(s-2)e^{-2s}}{(s+2)(s+3)+K(s-2)}=\frac{(s-2)e^{-2s}}{s^2+(5+K)s+(6-2K)}$$ （5 分）

二、求解下列两个小题：（**共 20 分**）

1. 已知 $f[n]=x[n]\cos(\pi n/4)$，其离散时间傅里叶变换为 $F(e^{j\Omega})=\begin{cases}1, & |\Omega|<\pi/2\\ 0, & \pi/2<|\Omega|\le\pi\end{cases}$，

在 Ω 的主值区间$(-\pi,\ \pi)$内。试确定序列 $x[n]$，并概画出其序列图形。（10 分）

解：序列 $f[n]$ 的离散时间傅里叶频谱为 $F(e^{j\Omega})=\begin{cases}1, & |\Omega|<\pi/2\\ 0, & \pi/2<|\Omega|\le\pi\end{cases}$

$$f[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{j2\pi n}[e^{j\pi n/2}-e^{-j\pi n/2}]=\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$ （3 分）

$$\text{所以 } x[n]=\frac{f[n]}{\cos(\pi n/4)}=\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n\cos(\pi n/4)}=\frac{2\sin(\pi n/4)\cos(\pi n/4)}{\pi n\cos(\pi n/4)}=\frac{2\sin(\pi n/4)}{\pi n}$$ （3 分）

$x[n]$ 的序列图形如图 2.1 所示。 （4 分）

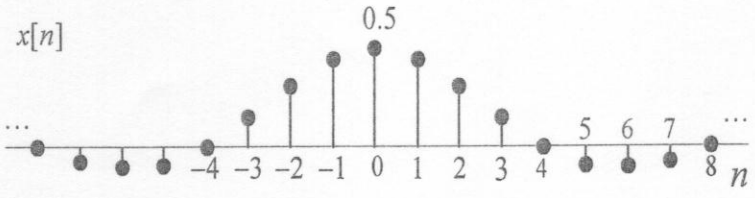


图 2.1

2. 试求由差分方程 $y[n]-(3/2)y[n-1]+(1/2)y[n-2]=x[n]+\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 和起始条件

$y[-1]=1$，$y[-2]=2$ 表征的离散时间因果系统，$x[n]=(1/2)^n u[n]$ 时，系统的输出 $y[n]$，$n\ge 0$。并写出其中的零输入响应 $y_{zi}[n]$ 和零状态响应 $y_{zs}[n]$。（10 分）

http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089

解：原差分方程的右边可以简化为 $x[n]+x[n]*u[n]$，故原方程可以化为：

$$y[n]-(3/2)y[n-1]+(1/2)y[n-2]=x[n]+x[n]*u[n]$$

对此方程两边同时做单边 Z 变换，得到：

$$Z_u\{y[n]-(3/2)y[n-1]+(1/2)y[n-2]\}=Z_u\{x[n]+x[n]*u[n]\}$$

$$Z_u\{y[n]\}-(3/2)Z_u\{y[n-1]\}+(1/2)Z_u\{y[n-2]\}=Z_u\{x[n]\}+Z_u\{x[n]\}Z_u\{u[n]\}$$

记 $Z_u\{y[n]\}=Y_u(z)$，$Z_u\{x[n]\}=X_u(z)$，利用

$$Z_u\{y[n-1]\}=z^{-1}Y_u(z)+y[-1]，\quad Z_u\{y[n-2]\}=z^{-2}Y_u(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2]$$

可得
$$Y_u(z)-(3/2)(z^{-1}Y_u(z)+y[-1])+(1/2)(z^{-2}Y_u(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2])$$
$$=X_u(z)+X_u(z)Z_u\{u[n]\}$$

$$Y_u(z)[1-(3/2)z^{-1}+(1/2)z^{-2}]-(3/2)y[-1]+(1/2)z^{-1}y[-1]+(1/2)y[-2]$$
$$=X_u(z)+X_u(z)Z_u\{u[n]\}$$

$$Y_u(z)=\frac{X_u(z)+X_u(z)Z_u\{u[n]\}+(3/2)y[-1]-(1/2)y[-2]-(1/2)y[-1]z^{-1}}{1-(3/2)z^{-1}+(1/2)z^{-2}}$$

当输入信号 $x[n]=(1/2)^n u[n]$，$X_u(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}},\mathrm{ROC}:|z|>\frac{1}{2}$，$Z_u\{u[n]\}=\frac{1}{1-z^{-1}}$

零状态响应 $y_{zs}[n]$：

$$y_{zs}[n]=L^{-1}\{\frac{X_u(z)+X_u(z)Z_u\{u[n]\}}{1-(3/2)z^{-1}+(1/2)z^{-2}}\}=L^{-1}\{\frac{\frac{1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\times\frac{1}{1-z^{-1}}}{1-(3/2)z^{-1}+(1/2)z^{-2}}\}$$

$$=L^{-1}\{\frac{2}{(1-0.5z^{-1})(1-z^{-1})^2}\}=L^{-1}\{\frac{2}{1-0.5z^{-1}}+\frac{-4}{1-z^{-1}}+\frac{4}{(1-z^{-1})^2}\}$$

所以 $y_{zs}[n]=2(\frac{1}{2})^n u[n]-4u[n]+4(n+1)u[n]=[(\frac{1}{2})^{n-1}+4n]u[n]$ （4 分）

零输入响应 $y_{zi}[n]$：

$$y_{zi}[n]=L^{-1}\{\frac{(3/2)y[-1]-(1/2)y[-2]-(1/2)y[-1]z^{-1}}{1-(3/2)z^{-1}+(1/2)z^{-2}}\}$$，代入 $y[-1]=1$，$y[-2]=2$

$$y_{zi}[n]=L^{-1}\{\frac{(3/2)\times1-(1/2)\times2-(1/2)\times1\times z^{-1}}{1-(3/2)z^{-1}+(1/2)z^{-2}}\}$$

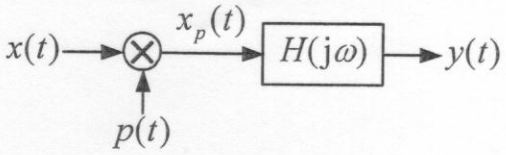
$$=L^{-1}\{\frac{(1/2)(1-z^{-1})}{1-(3/2)z^{-1}+(1/2)z^{-2}}\}=L^{-1}\{\frac{0.5}{1-0.5z^{-1}}\}=(\frac{1}{2})^{n+1}u[n]$$

（4 分）

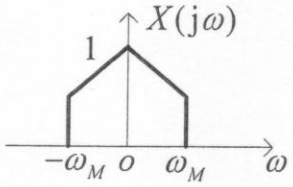
系统总输出信号 $y[n]$ 为：$y[n]=y_{zs}[n]+y_{zi}[n]=[(\frac{1}{2})^{n+1}+(\frac{1}{2})^{n-1}+4n]u[n]$ （2 分）

三、考虑如题图 3 (a)所示的连续时间系统。$x(t)$ 为带限信号，其频谱如题图 3 (b)所示。$p(t)$ 为周期三角脉冲信号，其周期为 T_s，脉宽为 τ，如题图 3 (c)所示。（**共 20 分**）

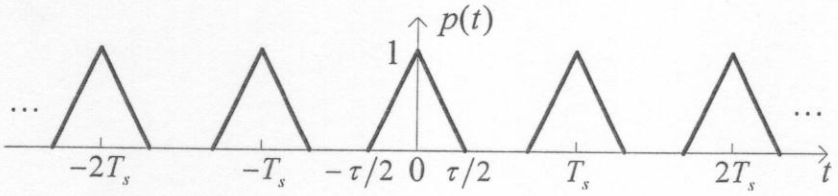
http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089



题图 3 (a)



题图 3 (b)



题图 3 (c)

1. 试求相乘器输出的信号 $x_p(t)$ 的频谱 $X_p(j\omega)$，并概略画出该频谱图形。（14 分）
2. 如果使用低通滤波器 $H(j\omega)$，从信号 $x_p(t)$ 中无失真地恢复原输入信号 $x(t)$，那么周期脉冲信号 $p(t)$ 应该满足什么条件？并确定 $H(j\omega)$ 的特性。（6 分）

解： 1. 系统为一个连续时间采样系统，采样信号 $p(t)$ 为周期三角脉冲信号，可以表示为：

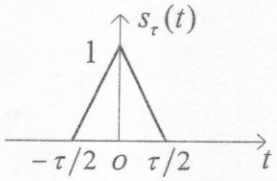


图3.1

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_\tau(t-nT_s)=s_\tau(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

其中，$s_\tau(t)$ 是如图 3.1 所示的三角脉冲信号。

其傅里叶频谱为 $S_\tau(\omega)=F\{s_\tau(t)\}$

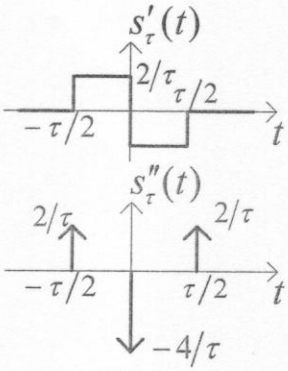


图3.2

如图 3.2 所示，可以通过对 $s_\tau(t)$ 进行两次微分可得到由冲激项表示的二次导函数，再利用傅里叶变换的时域微分性质求解。

$$S_\tau(\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2}\left[\frac{2}{\tau}e^{j\omega\tau/2}-\frac{4}{\tau}+\frac{2}{\tau}e^{-j\omega\tau/2}\right]$$

$$=\frac{2}{\tau}\frac{1}{(j\omega)^2}(e^{j\omega\tau/4}-e^{-j\omega\tau/4})^2=\frac{2}{\tau}\frac{(2j\sin(\omega\tau/4))^2}{(j\omega)^2}$$

$$=\frac{8}{\tau}\frac{\sin^2(\omega\tau/4)}{\omega^2}=\frac{\tau}{2}\left(\frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4}\right)^2=\frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\omega\tau/4)\qquad（4 分）$$

则采样信号 $p(t)$ 的频谱 $P(\omega)$：

$$P(\omega)=S_\tau(\omega)\times\frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)=\frac{\pi\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}^2(n\omega_s\tau/4)\delta(\omega-n\omega_s)，\text{其中}\ \omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$$

那么相乘器输出的信号 $x_p(t)=x(t)p(t)$，根据傅里叶变换的频域卷积定理：

$$X_p(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\frac{\pi\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}^2(n\omega_s\tau/4)\delta(\omega-n\omega_s)$$

http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089

$$=\frac{\tau}{2T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}^2(n\omega_s\tau/4)X(\omega)*\delta(\omega-n\omega_s)=\frac{\tau}{2T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}^2(n\omega_s\tau/4)X(\omega-n\omega_s)$$ （4 分）

其频谱图形如图 3.3 所示。 （6 分）

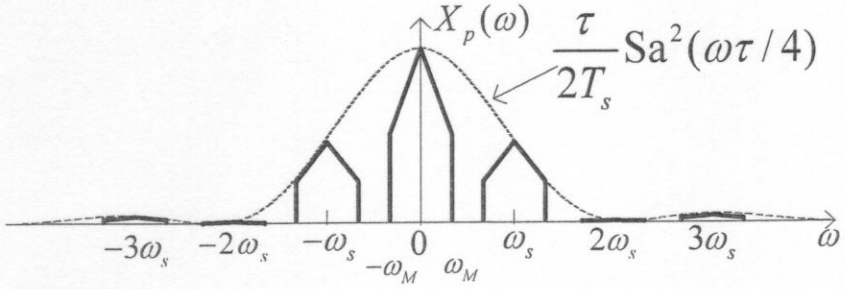


图 3.3

2. 如果要从信号 $x_p(t)$ 中无失真地恢复原输入信号 $x(t)$，根据 Nyquist 采样定理，采用频率 ω_s 必须要满足 $\omega_s \geq 2\omega_M$，或者周期三角脉冲信号 $p(t)$ 的周期为 T_s 要满足：

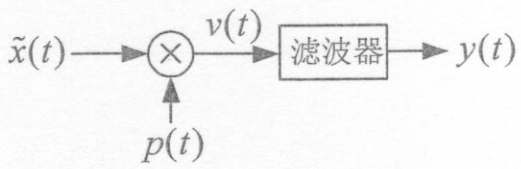
$T_s \leq \pi/\omega_M$。 （3 分）

可以使用理想低通滤波器 $H(\mathrm{j}\omega)$ 对 $x_p(t)$ 信号进行滤波以恢复原输入信号 $x(t)$。

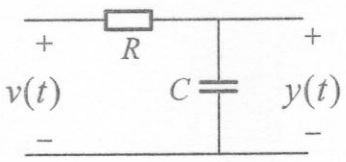
该滤波器的频率响应：$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}2T_s/\tau, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$，$\omega_M<\omega_c<(\omega_s-\omega_M)$ （3 分）

四、 周期为 T 的实周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的指数形式的傅里叶级数和三角傅里叶级数分别表示为

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad 和 \quad \tilde{x}(t)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t+\theta_k\right)$$



题图 4 (a)



题图 4 (b)

采用题图 4 (a)的系统来获得已知实周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的各次谐波的幅度 c_k 和初相位 θ_k，$k=1,2,\cdots$。图中，滤波器的单位冲激响应 $h(t)=\dfrac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}$。试求：（**共 25 分**）

1. 当 $p(t)=\cos[k(2\pi/T)t]$ 和 $p(t)=\sin[k(2\pi/T)t]$ 时，分别画出 $\tilde{x}(t)$ 和 $v(t)$ 的频谱，并分别求出两种情况下题图 4 (a) 所示系统的输出 $y(t)$。（10 分）

解： 依题意乘法器的输出 $v(t)=\tilde{x}(t)p(t)$，当 $p(t)=\cos[k(2\pi/T)t]$ 和 $p(t)=\sin[k(2\pi/T)t]$ 时，该乘法器的输出 $v(t)$ 分别记为 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$，即

$$v_1(t)=x(t)\cos[k(2\pi/T)t],\quad v_2(t)=x(t)\sin[k(2\pi/T)t]$$

http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089

它们的傅里叶变换记为$V_1(\omega)$和$V_2(\omega)$，那么有：

$$V_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\pi[\delta(\omega+k\frac{2\pi}{T})+\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})]=\frac{1}{2}[X(\omega+k\frac{2\pi}{T})+X(\omega-k\frac{2\pi}{T})]$$

$$V_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+k\frac{2\pi}{T})-\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})]=\frac{\mathrm{j}}{2}[X(\omega+k\frac{2\pi}{T})-X(\omega-k\frac{2\pi}{T})]$$

$X(\omega)$和$V_1(\omega)$、$V_2(\omega)$如图 4.1 所示，图中$\omega_0=2\pi/T$。（5 分）

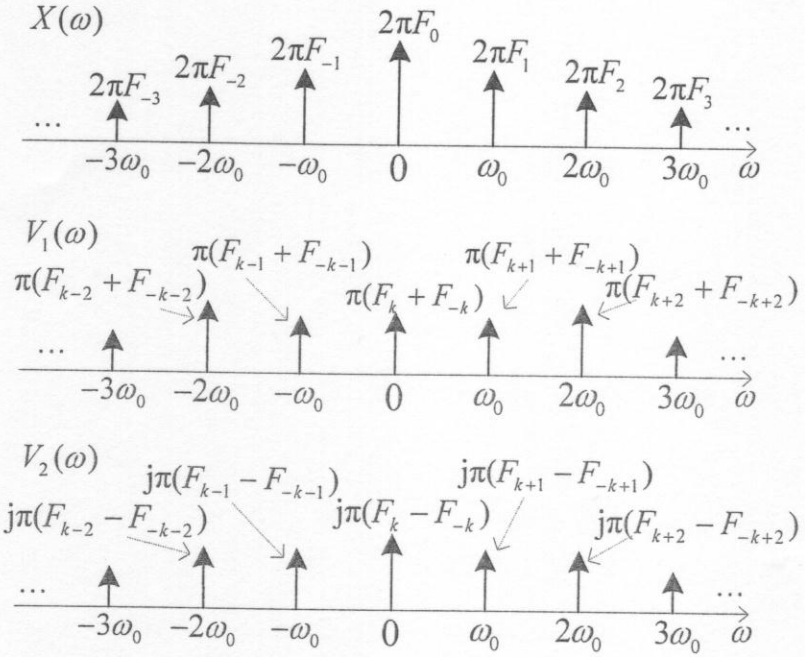


图4.1

题图 4 (a)系统中的滤波器的单位冲激响应为$h(t)=\sin(\pi t/T)/\pi t$，则该滤波器为截止频率为$\omega_c=\pi/T=\omega_0/2$的理想低通滤波器，其频率响应为：

$$H_L(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\pi/T\\ 0, & |\omega|>\pi/T\end{cases}$$，系统的输出$y(t)$只有$V_1(\omega)$、$V_2(\omega)$的直流分量。（1 分）

由于$\tilde{x}(t)$是实周期信号，其傅里叶级数系数存在关系：$F_{-k}=F_k^*$。

$p(t)=\cos(k\frac{2\pi}{T}t)$，$y_1(t)=F^{-1}\{\pi(F_k+F_{-k})\}=\frac{1}{2}(F_k+F_{-k})=\frac{1}{2}(F_k+F_k^*)=\mathrm{Re}\{F_k\}$（2 分）

$p(t)=\sin(k\frac{2\pi}{T}t)$，$y_2(t)=F^{-1}\{\mathrm{j}\pi(F_k-F_{-k})\}=\frac{\mathrm{j}}{2}(F_k-F_{-k})=\frac{\mathrm{j}}{2}(F_k-F_k^*)=-\mathrm{Im}\{F_k\}$（2 分）

2. 根据 1. 小题的结果，设计能分别获得实周期信号$\tilde{x}(t)$的k次谐波的幅度c_k和初相位θ_k，$k=1,2,3,\cdots$，的系统，并画出系统框图。（8 分）

解：根据 1. 小题的结果，实周期信号$\tilde{x}(t)$的k次谐波的幅度c_k和初相位θ_k，$k=1,2,3,\cdots$，分别为：

$$c_k=|F_k|=\sqrt{(\mathrm{Re}\{F_k\})^2+(\mathrm{Im}\{F_k\})^2}=\sqrt{y_1^2(t)+y_2^2(t)},\quad \theta_k=\arctan(\frac{\mathrm{Im}\{F_k\}}{\mathrm{Re}\{F_k\}})=-\arctan(\frac{y_2(t)}{y_1(t)})$$

http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089

故获得c_k和θ_k的系统框图如图 4.2 所示。（8 分）

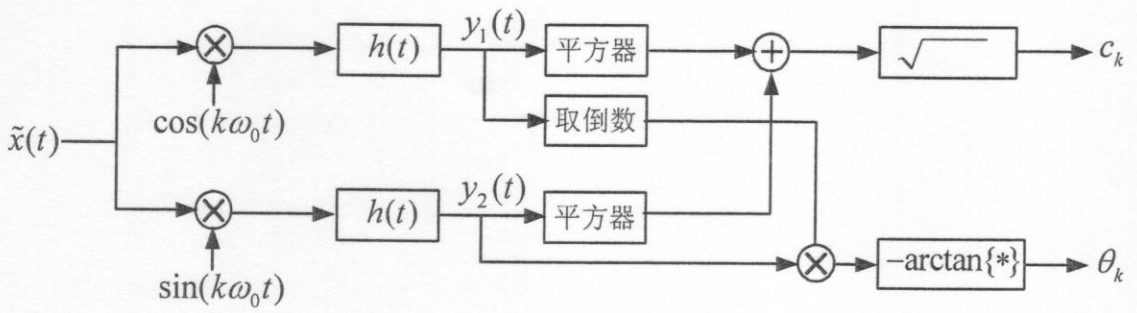


图 4.2

3. 如果题图 4 (a)中的滤波器换成题图 4 (b)所示的一阶 RC 低通滤波器，将对 2. 小题设计结果产生什么影响；若要使设计的系统仍希望获得较精确的c_k和θ_k的值，RC 低通滤波器的时间常数$\tau = RC$的选择应有什么考虑。（7 分）

解： 题图 4 (b)所示的一阶 RC 低通滤波器的频率响应为$H(\omega) = \dfrac{1/\tau}{j\omega + 1/\tau}$，如果题图 4 (a)中的滤波器换成题图 4 (b)所示的，那么题图 4 (a)系统的输出$y(t)$除了$\mathrm{Re}\{F_k\}$或者$-\mathrm{Im}\{F_k\}$外，还有衰减了的其它谐波分量，将对 2. 小题设计的系统的结果产生误差。（4 分）

要使设计的取c_k和θ_k的系统仍然能够获得希望的结果，一阶 RC 低通滤波器的时间常数$\tau = RC$应选得尽可能大，即它的$-3dB$截止频率$\omega_c = 1/\tau \ll 2\pi/T$。具体要小到什么程度，要由两个因素确定：

（1）c_k和θ_k要求的精度。

（2）$\tilde{x}(t)$的傅里叶级数系数F_k的递减速度等。（3 分）

五、数字滤波是最常用的数字信号处理方法，对于 IIR 和 FIR 这两种数字滤波器，有效地实现无限长数字信号$x[n]$，$n = 0, 1, 2\cdots$，的滤波方法是不相同的。（**共 25 分**）

1. 对于 IIR 滤波器，若已知滤波器的系统函数$H_d(z) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$，试写出计算无限长数字信号$x[n]$通过该 IIR 滤波器的输出信号$y[n]$，$n = 0, 1, 2\cdots$，的计算公式，以及用三种计算单元(数字相加器、数乘器和单位延时器)的实现框图。（10 分）

解：该 IIR 滤波器所对应的差分方程为：

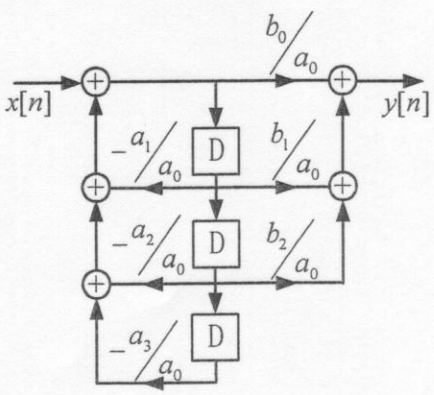
$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + a_3 y[n-3] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

则信号$x[n]$通过该 IIR 滤波器的输出信号$y[n]$，$n = 0, 1, 2\cdots$，的计算公式为：

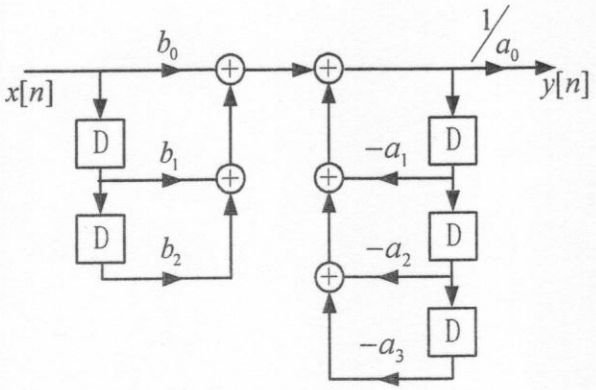
http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\{b_0x[n]+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]-a_1y[n-1]-a_2y[n-2]-a_3y[n-3]\}$$ （3 分）

该 IIR 滤波器的实现框图如图 5.1 所示（只要给出其中一种即可）。 （7 分）



(a)规范型实现结构



(a)直接 I 型实现结构

图 5.1

2. 对于 FIR 滤波器，通常采用 FFT 程序的快速卷积(或称频域滤波)方法来实现 $x[n]$ 的数字滤波。若已知 FIR 滤波器的单位冲激响应 $h_d[n]=\sum_{k=0}^{15}h_k\delta[n-k]$，试画出采用 128 点 FFT 程序，分段计算无限长数字信号 $x[n]$ 通过该 FIR 滤波器的输出信号 $y[n]$，$n=0$，1，2 …，的实现框图；并分别说明采用**重叠相加法**和**重叠保留法**的快速卷积方法来计算输出信号 $y[n]$ 时，对 $x[n]$ 是如何分段的，又如何从每个分段滤波结果**连接成**无限长的 $y[n]$。（15 分）

解： 依题意，采用 128 点 FFT 程序，分段计算无限长数字信号 $x[n]$ 通过该 FIR 滤波器 $h_d[n]$ 的输出信号 $y[n]$ 的实现框图如图 5.2 所示。 （7 分）

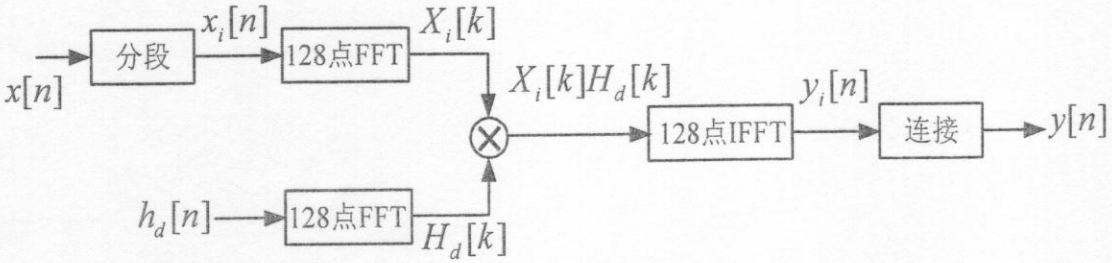


图 5.2

在图 5.2 中，FIR 滤波器的单位冲激响应 $h_d[n]=\sum_{k=0}^{15}h_k\delta[n-k]$ 列长为 $M=16$，将它补零至列长为 $N=128$，然后利用 128 点 FFT 程序，得到其频谱序列 $H_d[k]$。对无限长数字信号 $x[n]$ 的分段，以及从每个分段滤波结果**连接成**无限长的 $y[n]$ 可以采用重叠相加法和重叠保留法。

http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089

（1）重叠相加法：

将$x[n]$按每段长度为L分段，第i段记为$x_i[n], i=0,1,2,\cdots$，每段与FIR滤波器单位冲激相应卷积即$x_i[n]*h_d[n]$，输出序列列长均为$N=L+M-1$，为了利用128点FFT程序，应取$N=128$，故$x[n]$分段长度$L=N-M+1=128-16+1=113$。分段后对每个$x_i[n], i=0,1,2,\cdots$补零至列长为$N=128$，然后利用128点FFT程序计算$X_i[k]$，将$X_i[k]$与$H_d[k]$相乘，再利用128点FFT程序计算反变换，得到$y_i[n]$，把各$y_i[n]$相加起来就得到总的输出$y[n]$。每段$y_i[n]$的最后$M-1=15$个点和下一段的前$M-1=15$点重叠，这些重叠的部分也要相加。（4分）

（2）重叠保留法：

按照每段列长$L=113$对$x[n]$分段，然后将每段$x_i[n]$的列长延长至$N=128$，但不是通过补零的方法，而是保留上一段的最后$M-1=15$个点，对于第一个分段只要在前面填充$M-1=15$个零值点。这样得到的$x_i[n]$经过128点FFT得到$X_i[k]$，然后$X_i[k]$与$H_d[k]$相乘，再利用128点FFT程序计算反变换，得到$y_i[n]$，将每段$y_i[n]$的前面的$M-1=15$个点舍去，然后把相邻的各输出段留下的序列衔接起来，就构成正确的输出$y[n]$。（4分）

六、加窗是数字信号处理中常见的操作。汉宁窗是一种常见窗序列，其偶对称表示式为：

$$w[n]=\begin{cases}\cos^2(\frac{n}{N}\pi), & n=-\frac{N}{2},\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{N}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$，其中N为偶的正整数。**（共20分）**

1. 试确定该汉宁窗的频谱函数$W(e^{j\Omega})$。（10分）

解： 汉宁窗可以表达为$w[n]=\cos^2(\frac{n}{N}\pi)w_R[n]$，其中$w_R[n]$为一个矩形窗函数，即$w_R[n]=1,\ n=-\frac{N}{2},\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{N}{2}$，其窗函数长度为$N+1$个点。考虑到汉宁窗在$n=N/2$时取值为0，那么取窗函数长度为$N$个点的矩形窗会得到相同的结果。因此重新取$w_R[n]=1,\ n=-\frac{N}{2},\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$，其频谱函数为：

$$W_R(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}w_R[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{-N/2}^{N/2-1}e^{-j\Omega n}=e^{-jN\Omega/2}\sum_{0}^{N-1}e^{-j\Omega n}=\frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}e^{-j\Omega/2}$$（3分）

汉宁窗$w[n]=\cos^2(\frac{n}{N}\pi)w_R[n]=\frac{1}{2}[1+\cos(\frac{2n}{N}\pi)]w_R[n],\ n=-\frac{N}{2},\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$

$$w[n]=\frac{1}{2}[1+\frac{1}{2}(e^{j2\pi n/N}+e^{-j2\pi n/N})]w_R[n]=[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(e^{j2\pi n/N}+e^{-j2\pi n/N})]w_R[n]$$（3分）

根据傅里叶变换的频移定理，其频谱函数$W(e^{j\Omega})$：

$$W(e^{j\Omega})=\frac{1}{2}W_R(e^{j\Omega})+\frac{1}{4}W_R(e^{j(\Omega+2\pi n/N)})+\frac{1}{4}W_R(e^{j(\Omega-2\pi n/N)})$$（4分）

http://shop59350285.taobao.com/ QQ:985673089

2. 如果把该汉宁窗的频谱函数表达为$W(e^{j\Omega})=W(\Omega)e^{-j\Omega\alpha}$，其中$W(\Omega)$为实函数。试概略画出$W(\Omega)$的图形。（5分）

解：可以把$W_R(e^{j\Omega})$写成$W_R(e^{j\Omega})=W_R(\Omega)e^{-j\Omega/2}$，其中$W_R(\Omega)=\dfrac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}$为矩形窗的频谱幅度函数。如果把汉宁窗的频谱函数表达为$W(e^{j\Omega})=W(\Omega)e^{-j\Omega\alpha}$，那么有：

$W(\Omega)\approx\dfrac{1}{2}W_R(\Omega)+\dfrac{1}{4}W_R(\Omega+2\pi n/N)+\dfrac{1}{4}W_R(\Omega-2\pi n/N)$，其图形如图6.1所示。（5分）

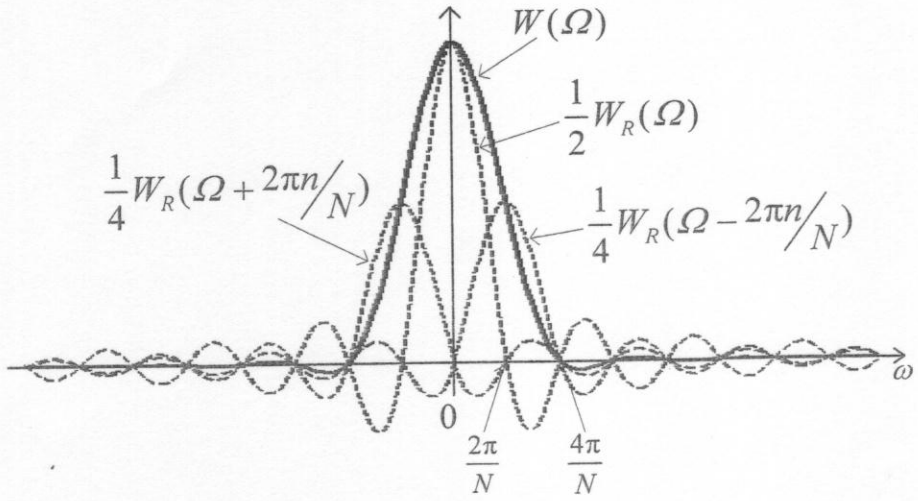


图6.1

3. 在实际的数字信号处理中，通常使用的是单边的汉宁窗，其表示式是$w[n]=\sin^2(n\pi/N)$，$n=0,1,\cdots,N-1$，其中N为偶的正整数。对序列$x[n]$进行汉宁窗$w[n]$加权后的离散傅里叶变换为$X_W[k]=\sum_{n=0}^{N-1}w[n]x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$。

试证明，计算$X_W[k]$，完全可以省略掉$x[n]$与$w[n]$的相乘运算，而直接计算$x[n]$的DFT变换$X[k]$，然后通过对$X[k]$序列进行线性组合来得到$X_W[k]$。（5分）

解：对序列$x[n]$进行汉宁窗$w[n]$加权后的离散傅里叶变换$X_W[k]$为：

$$X_W[k]=\sum_{n=0}^{N-1}w[n]x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\sin^2(\frac{\pi}{N}n)x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{N}n)]x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1}[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{N}n}-\frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}]x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-1)n}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+1)n}$$

由此可以得到$X_W[k]$是$X[k]$序列的线性组合，即：

$$X_W[k]=\frac{1}{2}X[k]-\frac{1}{4}X[k-1]-\frac{1}{4}X[k+1]=\frac{1}{2}\{X[k]-\frac{1}{2}(X[k-1]+X[k+1])\}$$ （5分）

2010 年硕士学位研究生入学考试试题

（信号与系统）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

□需使用计算器　　√不使用计算器

一. 计算题（1～4 小题每题 5 分，5～8 小题每题 7 分，共 48 分）

1. 对于以输入输出关系 $y(t)=x(t)\cos[\omega_0(t-2)+\varphi_0],\omega_0\neq 0$ 描述的系统，简要判断系统的有记忆性，线性，时不变性，因果性和稳定性。

2. 对于以输入输出关系 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n+2}(1/2)^{n-k}x[k]$ 描述的系统，简要判断系统的有记忆性，线性，时不变性，因果性和稳定性。

3. 计算 $\sin(\pi n/2)/(\pi n)*\sin(\pi n/3)/(\pi n)$，其中符合 $*$ 为卷积运算符号。

4. 计算对连续时间信号 $\mathrm{Sa}^2(\omega_0 t)$ 进行采样的奈奎斯特间隔 T_s。

5. 已知因果序列 $x[n]$ 的 Z 变换像函数为 $X(z)=\dfrac{z^{-3}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$，试求序列 $x[n]$ 的初值 $x[0]$ 和终值 $\lim_{n\to\infty}x[n]$。

6. 已知系统的频率响应为 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\omega e^{-\mathrm{j}(\omega-3\pi/2)}}{10-\omega^2+6\mathrm{j}\omega}$，求它的单位冲激响应 $h(t)$。

7. 计算信号 $x(t)=u(t)-u(t-\pi)$ 与信号 $y(t)=\cos(t)[u(t)-u(t-\pi)]$ 的互相关函数 $R_{xy}(t)$。

8. 已知 $X(s)=\dfrac{1}{(s^2+\pi^2)(1+e^{-2s})},\mathrm{Re}\{s\}>0$，试求 $x(t)$。

二. 已知如图 2(a) 所示周期三角波信号 $x(t)$，通过一个频率响应特性 $H(\omega)$ 如图 2(b) 所示的 LTI 系统。（14 分）

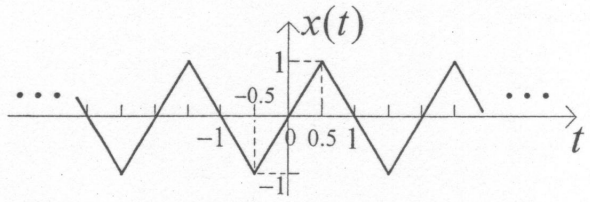


图 2(a)

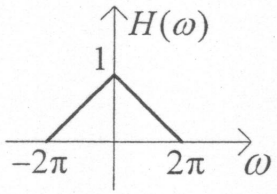


图 2(b)

1）试求输出信号 $y(t)$；（10 分）

2）试求该输出信号 $y(t)$ 的功率与输入信号 $x(t)$ 的功率之比值。（4 分）

三. 对于如下微分方程描述的连续时间因果系统

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2[x(t)+e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}x(\tau)d\tau]$$

已知$x(t)=u(t)$，起始条件为$y(0_-)=1, y'(0_-)=-5$，试求：（16 分）

系统的全响应$y(t), t\geq 0$，写出系统的零输入响应$y_{zi}(t)$和零状态响应$y_{zs}(t)$，自由响应$y_{fr}(t)$和强迫响应$y_{fo}(t)$，暂态响应$y_{tr}(t)$和稳态响应$y_{st}(t)$。

四. 某带通系统的频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}(\omega-1000)}+\frac{1}{1+\mathrm{j}(\omega+1000)}$$。试求：（17 分）

1）该系统的单位冲激响应$h(t)$；（6 分）

2）概画$H(\mathrm{j}\omega)$的幅频响应特性曲线和相频响应特性曲线；（6 分）

3）系统的输入为$x(t)=(1+\cos t)\cos(1000t)$，求输出$y(t)$。（5 分）

五. 现欲对一个已知的N点序列$x[n], 0\leq n<N$进行滤波处理，所用滤波器是系统函数为$H(z)=\dfrac{2z+4.5+z^{-1}}{z+4.5+2z^{-1}}$的稳定系统。（25 分）

1）确定该滤波器所对应的差分方程，给出它的规范型实现方框图；（6 分）

2）画出$H(z)$在 z 平面零极点分布和收敛域；（6 分）

3）概画该滤波器的幅频响应特性曲线；（5 分）

4)假设 MATLAB 中存在一个函数$y=\mathrm{myfilter}(b,a,X)$，它能够实现对一维序列$X$按照向量$b=[b(1)\ \ b(2)\ \cdots\ b(nb)]$和向量$a=[a(1)\ \ a(2)\ \cdots\ a(na)]$所确定的因果稳定的滤波器$H_0(z)=\dfrac{b(1)+b(2)z^{-1}+\ldots+b(nb)z^{-(nb-1)}}{a(1)+a(2)z^{-1}+\ldots+a(na)z^{-(na-1)}}$进行因果滤波。请问能否利用这个函数实现本题的滤波处理？如果能，请分析实现方法，并给出相应的处理过程。（8 分）

六. 现有一长度为N的序列$\{x[n], n=0,1,\ldots,N-1\}$。设$N$可以表达为两个正整数的乘积，即$N=ML$，这里$M$和$L$分别为两个正整数。现欲求序列$x[n]$的 DFT。为减少乘法运算量，要求将该$N$点 DFT 分解成为若干$M$点 DFT 和若干$L$点 DFT 进行运算。试求：（15 分）

1）推导出分解运算表达式；（10 分）

2）给出分解运算后的复数乘法运算量，并与直接计算N点 DFT 所需的复数乘法运算量作比较，给出你的结论。（5 分）

七. 用窗函数法设计具有线性相位特性的FIR低通滤波器，系统采样频率为40kHz。滤波器的幅度特性要求为：通带截止频率10kHz，过渡带宽为2kHz，带外最小衰减不低于50dB。试求：（15分）

1）根据设计指标要求在下表中选择最佳的窗函数，导出滤波器阶数N；（7分）

2）若采用窗函数$w[n]$，且已经确定滤波器阶数为N，试导出该滤波器的单位冲激（或单位取样）响应$h[n]$表达式。（8分）

参考窗函数表

窗函数	主瓣宽度	旁瓣电平	最小阻带衰减
矩形窗：$w[n]=1,\quad n=0,\cdots,N-1$	$4\pi/N$	−13dB	21dB
三角形窗：$w[n]=\begin{cases}\dfrac{n}{N/2}, & n=0,\cdots,\dfrac{N}{2}\\ \dfrac{N-n-1}{N/2}, & n=\dfrac{N}{2}+1,\cdots,N-1\end{cases}$	$8\pi/N$	−25dB	25dB
Hanning窗：$w[n]=\sin^2(\dfrac{\pi}{N}n),\quad n=0,\cdots,N-1$	$8\pi/N$	−32dB	44dB
Hamming窗：$w[n]=0.54-0.46\cos\dfrac{2\pi}{N}n,\quad n=0,\cdots,N-1$	$8\pi/N$	−42dB	53dB
Blackman窗：$w[n]=0.42-0.5\cos\dfrac{2\pi}{N}n+0.08\cos\dfrac{4\pi}{N}n,\quad n=0,\cdots,N-1$	$12\pi/N$	−57dB	74dB

2010 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

（信号与系统）

一. 计算题（1～4 小题各 5 分，5～8 小题各 7 分，共 48 分）

1. 对于以输入输出关系 $y(t)=x(t)\cos[\omega_0(t-2)+\varphi_0],\omega_0\neq 0$ 描述的系统，简要判断系统的有记忆性，线性，时不变性，因果性和稳定性。

解：该系统是无记忆系统（或具有无记忆性）；线性系统（或具有线性）；时变系统（或不具有时不变性）；因果系统（或具有因果性）；稳定系统（或具有稳定性）。（每判断 1 分共 5 分）

2. 对于以输入输出关系 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n+2}(1/2)^{n-k}x[k]$ 描述的系统，简要判断系统的有记忆性，线性，时不变性，因果性和稳定性。

解：因为 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n+2}(1/2)^{n-k}x[k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1/2)^{n-k}u[n+2-k]x[k]$

可见这个系统的单位冲激响应为 $h[n]=(1/2)^n u[n+2]$，根据 $h[n]$ 的特征可以判断这个系统是有记忆系统；线性系统；时不变系统；非因果系统；稳定系统。（每判断 1 分共 5 分）

3. 计算 $\sin(\pi n/2)/(\pi n)*\sin(\pi n/3)/(\pi n)$，其中符合 $*$ 为卷积运算符号。

解：因为 $\sin(\pi n/2)/(\pi n)\xrightarrow{\text{DTFT}}F_1(e^{j\Omega})=\begin{cases}1,-\pi/2+2k\pi\le\Omega<\pi/2+2k\pi,\ k\in Z\\0,\text{其它}\end{cases}$

$\sin(\pi n/3)/(\pi n)\xrightarrow{\text{DTFT}}F_2(e^{j\Omega})=\begin{cases}1,-\pi/3+2k\pi\le\Omega<\pi/3+2k\pi,\ k\in Z\\0,\text{其它}\end{cases}$

$\sin(\pi n/2)/(\pi n)*\sin(\pi n/3)/(\pi n)\xrightarrow{\text{DTFT}}F_1(e^{j\Omega})F_2(e^{j\Omega})$

根据 $F_1(e^{j\Omega})$ 和 $F_2(e^{j\Omega})$ 的波形，显然有 $F_1(e^{j\Omega})F_2(e^{j\Omega})=F_2(e^{j\Omega})$

再做离散时间傅里叶反变换，可得：

$\sin(\pi n/2)/(\pi n)*\sin(\pi n/3)/(\pi n)=\sin(\pi n/3)/(\pi n)$　　（5 分）

4. 计算对连续时间信号 $\text{Sa}^2(\omega_0 t)$ 进行采样的奈奎斯特间隔 T_s。

解：$\text{Sa}(\omega_0 t)=\dfrac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}=\dfrac{\pi}{\omega_0}\dfrac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}\xrightarrow{\text{CTFT}}F_1(j\omega)=\begin{cases}\pi/\omega_0, & |\omega|<\omega_0\\0, & |\omega|>\omega_0\end{cases}$

$\text{Sa}^2(\omega_0 t)=\text{Sa}(\omega_0 t)\times\text{Sa}(\omega_0 t)\xrightarrow{\text{CTFT}}F(j\omega)=\dfrac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_1(j\omega)$

经计算 $F(j\omega)=\dfrac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_1(j\omega)=\begin{cases}1-|\omega|/(2\omega_0), & |\omega|\le 2\omega_0\\0, & |\omega|>2\omega_0\end{cases}$

信号 $\text{Sa}^2(\omega_0 t)$ 的最高频率为 $\omega_M=2\omega_0$，根据采样定理，奈奎斯特采样频率

$\omega_s = 2\omega_M = 4\omega_0$，则奈奎斯特间隔 $T_s = \dfrac{2\pi}{\omega_s} = \dfrac{2\pi}{4\omega_0} = \dfrac{\pi}{2\omega_0}$。（5 分）

5. 已知因果序列 $x[n]$ 的 Z 变换像函数为 $X(z) = \dfrac{z^{-3}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$，试求序列 $x[n]$ 的初值 $x[0]$ 和终值 $\lim\limits_{n\to\infty} x[n]$。

解：根据 Z 变换的初值定理，因果序列 $x[n]$ 的初值：

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^{-3}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}} = 0$$ （3 分）

根据 Z 变换的终值定理，因果序列 $x[n]$ 的终值：

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^{-3}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

$$= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z(z^2-1.5z+0.5)} = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z(z-1)(z-0.5)}$$ （4 分）

$$= \lim_{z\to 1}\frac{1}{z(z-0.5)} = 2$$

6. 已知系统的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\omega e^{-\mathrm{j}(\omega-3\pi/2)}}{10-\omega^2+6\mathrm{j}\omega}$，求它的单位冲激响应 $h(t)$。

解：由于 $H(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\omega e^{-\mathrm{j}(\omega-3\pi/2)}}{10-\omega^2+6\mathrm{j}\omega} = \dfrac{-\mathrm{j}\omega e^{-\mathrm{j}\omega}}{10+6\mathrm{j}\omega+(\mathrm{j}\omega)^2}$

所以 $H(s) = \dfrac{-se^{-s}}{10+6s+s^2} = H_0(s)e^{-s}$

其中 $H_0(s) = \dfrac{-s}{10+6s+s^2} = \dfrac{-(s+3)}{(s+3)^2+1} + \dfrac{3}{(s+3)^2+1}$

$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t) \xrightarrow{L} \dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$，$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t) \xrightarrow{L} \dfrac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

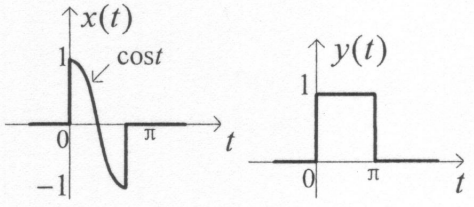
可得 $h_0(t) = L^{-1}\{H_0(s)\} = -e^{-3t}\cos(t)u(t) + 3e^{-3t}\sin(t)u(t)$

再利用 $h_0(t-t_0) \xrightarrow{L} H_0(s)e^{-st_0}$，最后得到

$h(t) = h_0(t-1) = -e^{-3(t-1)}\cos(t-1)u(t-1) + 3e^{-3(t-1)}\sin(t-1)u(t-1)$ （7 分）

7. 计算信号 $x(t) = \cos(t)[u(t)-u(t-\pi)]$ 与信号 $y(t) = u(t)-u(t-\pi)$ 的互相关函数 $R_{xy}(t)$。

解：互相关函数 $R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau+t)y^*(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y^*(\tau-t)d\tau$



方法一：利用卷积计算互相关函数，$R_{xy}(t)=x(t)*y^*(-t)$

记 $y_0(t)=y^*(-t)=u(t+\pi)-u(t)$，则 $R_{xy}(t)=x(t)*y_0(t)$

再利用卷积的性质：

$$R_{xy}(t)=x(t)*y_0(t)=\int_{-\infty}x(\tau)d\tau*\frac{dy_0(t)}{dt}$$

其中 $\int_{-\infty}x(\tau)d\tau=\sin t[u(t)-u(t-\pi)]$，而 $\frac{dy_0(t)}{dt}=\delta(t+\pi)-\delta(t)$

$$\begin{aligned}R_{xy}(t)&=\sin t[u(t)-u(t-\pi)]*[\delta(t+\pi)-\delta(t)]\\&=\sin(t+\pi)[u(t+\pi)-u(t)]-\sin t[u(t)-u(t-\pi)]\\&=-\sin t[u(t+\pi)-u(t-\pi)]\end{aligned}$$ （7 分）

方法二：直接利用互相关函数的定义采用图示方法也可计算得到 $R_{xy}(t)$。

8. 已知 $X(s)=\frac{1}{(s^2+\pi^2)(1+e^{-2s})},\mathrm{Re}\{s\}>0$，试求 $x(t)$。

解：

$$\begin{aligned}X(s)&=\frac{1}{(s^2+\pi^2)(1+e^{-2s})},\mathrm{Re}\{s\}>0\\&=\frac{(1-e^{-2s})}{(s^2+\pi^2)(1-e^{-4s})}=\frac{1-e^{-2s}}{s^2+\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-4s})^k=\frac{1-e^{-2s}}{s^2+\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-4ks},\mathrm{Re}\{s\}>0\end{aligned}$$

$\sin(\omega_0t)u(t)\xrightarrow{L}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2},\mathrm{Re}(s)>0$，所以 $\frac{1}{s^2+\pi^2}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)u(t)$

$$\frac{1-e^{-2s}}{s^2+\pi^2},\mathrm{Re}(s)>0\xrightarrow{L^{-1}}\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)u(t)-\frac{1}{\pi}\sin[\pi(t-2)]u(t-2)$$

$$=\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)[u(t)-u(t-2)]$$

$$\frac{1-e^{-2s}}{s^2+\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-4ks},\mathrm{Re}\{s\}>0\xrightarrow{L^{-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\sin[\pi(t-4k)][u(t-4k)-u(t-2-4k)]$$

即 $x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\sin[\pi(t-4k)][u(t-4k)-u(t-2-4k)]$ （7 分）

二. 已知如图 2 (a)所示周期三角波信号 $x(t)$，通过一个频率响应特性 $H(\omega)$ 如图 2(b)所示的 LTI 系统。(14 分)

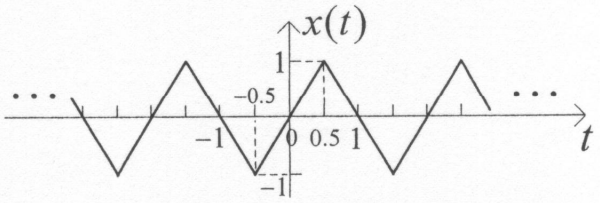


图 2(a)

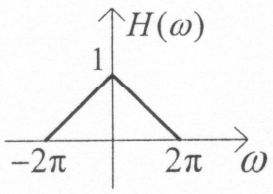


图 2(b)

1）试求输出信号 $y(t)$；(10 分)

2）试求该输出信号 $y(t)$ 的功率与输入信号 $x(t)$ 的功率之比值。(4 分)

解：1）周期三角波信号 $x(t)$ 的周期 $T=2$，基波频率 $\omega_0=2\pi/T=2\pi/2=\pi$

$x(t)$ 的傅里叶级数展开：$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$

其中系数 $a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}dt$

考虑该 LTI 系统的频率响应特性，那么信号 $x(t)$ 中仅有直流分量和基波分量能够通过该系统并得到输出，并且对基波分量有 0.5 倍放大，即：

$y(t)=a_0+0.5a_1e^{\mathrm{j}\pi t}+0.5a_{-1}e^{-\mathrm{j}\pi t}$ （1 分）

下面求这些傅里叶级数系数：$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(t)dt=0$ （1 分）

$a_1=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(t)e^{-\mathrm{j}\pi t}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(t)[\cos(\pi t)-\mathrm{j}\sin(\pi t)]dt$

因为 $x(t)$ 是奇函数，$x(t)\cos(\pi t)$ 也是奇函数，故 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(t)\cos(\pi t)dt=0$

而 $x(t)\sin(\pi t)$ 是偶函数，故 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(t)\sin(\pi t)dt=\int_{0}^{1}x(t)\sin(\pi t)dt$

则 $a_1=-\mathrm{j}\int_0^1 x(t)\sin(\pi t)dt=-\mathrm{j}[\int_0^{0.5}2t\sin(\pi t)dt+\int_{0.5}^{1}(-2t+2)\sin(\pi t)dt]$

$\int_{0.5}^{1}(-2t+2)\sin(\pi t)dt\xrightarrow{t=t+1}\int_{-0.5}^{0}[-2(t+1)+2]\sin[\pi(t+1)]d(t+1)$

$=\int_{-0.5}^{0}-2t\sin(\pi t+\pi)dt=\int_{-0.5}^{0}2t\sin(\pi t)dt$

$\xrightarrow{t=-t}\int_{0.5}^{0}2(-t)\sin(-\pi t)d(-t)=\int_0^{0.5}2t\sin(\pi t)dt$

$a_1=-2\mathrm{j}\int_0^{0.5}2t\sin(\pi t)dt=-2\mathrm{j}\times\frac{-2}{\pi}\int_0^{0.5}td\cos(\pi t)$

$=-2\mathrm{j}\times\frac{-2}{\pi}[t\cos(\pi t)|_0^{0.5}-\int_0^{0.5}\cos(\pi t)dt]$ （4 分）

$=-2\mathrm{j}\times\frac{-2}{\pi}\times[\frac{-1}{\pi}\int_0^{0.5}d\sin(\pi t)]=-2\mathrm{j}\times\frac{-2}{\pi}\times\frac{-1}{\pi}=-4\mathrm{j}/\pi^2$

由于 $x(t)$ 是实周期信号，$a_{-1}=a_1^*=4\mathrm{j}/\pi^2$ （1 分）

$y(t)=a_0+0.5a_1e^{\mathrm{j}\pi t}+0.5a_{-1}e^{-\mathrm{j}\pi t}$

$=0+0.5\times(-4\mathrm{j})/\pi^2\,e^{\mathrm{j}\pi t}+0.5\times(4\mathrm{j})/\pi^2\,e^{-\mathrm{j}\pi t}$ （3 分）

$=\frac{-2\mathrm{j}}{\pi^2}(e^{\mathrm{j}\pi t}-e^{-\mathrm{j}\pi t})=\frac{-2\mathrm{j}}{\pi^2}\times 2\mathrm{j}\sin(\pi t)=\frac{4}{\pi^2}\sin(\pi t)$

2）信号 $x(t)$ 的功率为 $P_x=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x(t)|^2\,dt$

根据信号 $x(t)$ 的对称特性，$P_x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x(t)|^2\,dt=4\times\frac{1}{2}\int_0^{0.5}(2t)^2dt=\frac{1}{3}$

信号 $y(t)$ 的功率为 $P_y=\frac{1}{2}(\frac{4}{\pi^2})^2=\frac{8}{\pi^4}$

则输出信号 $y(t)$ 的功率与输入信号 $x(t)$ 的功率之比值 $\frac{P_y}{P_x}=\frac{8}{\pi^4}\div\frac{1}{3}=\frac{24}{\pi^4}$ （4 分）

三. 对于如下微分方程描述的连续时间因果系统

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2[x(t)+e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}x(\tau)d\tau]$$

已知 $x(t)=u(t)$，起始条件为 $y(0_-)=1, y'(0_-)=-5$，试求： （16 分）

系统的全响应 $y(t), t\geq 0$，写出系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$，自由响应 $y_{fr}(t)$ 和强迫响应 $y_{fo}(t)$，暂态响应 $y_{tr}(t)$ 和稳态响应 $y_{st}(t)$。

解：$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2[x(t)+e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}x(\tau)d\tau]$

$$=2[x(t)+\int_0^\infty e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)x(\tau)d\tau]$$

把方程两边同时做单边 Laplace 变换：

$$s^2Y_u(s)-sy(0_-)-y'(0_-)+4[sY_u(s)-y(0_-)]+3Y_u(s)$$

$$=2X_u(s)+2X_u(s)\times L_u\{e^{-2t}u(t)\}=2X_u(s)(1+\frac{1}{s+2}) \quad （2 分）$$

$$Y_u(s)=\frac{2X_u(s)}{s^2+4s+3}(1+\frac{1}{s+2})+\frac{sy(0_-)+y'(0_-)+4y(0_-)}{s^2+4s+3}$$

则输出 $y(t), t\geq 0$ 中零输入响应 $y_{zi}(t)$ 的单边 Laplace 变换为：

$$Y_{uzi}(s)=\frac{sy(0_-)+y'(0_-)+4y(0_-)}{s^2+4s+3}=\frac{s\times 1+(-5)+4\times 1}{s^2+4s+3}$$

$$=\frac{s-1}{(s+3)(s+1)}=\frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+3}$$

经反变换得到零输入响应 $y_{zi}(t)=-e^{-t}u(t)+2e^{-3t}u(t)$ （4 分）

输出 $y(t), t\geq 0$ 中零状态响应 $y_{zs}(t)$ 的单边 Laplace 变换为：

$$Y_{uzs}(s)=\frac{2X_u(s)}{s^2+4s+3}(1+\frac{1}{s+2})，\text{由于 } x(t)=u(t)\xrightarrow{L_u}1/s$$

$$Y_{uzs}(s)=\frac{2}{s(s^2+4s+3)}(1+\frac{1}{s+2})=\frac{2}{s(s+1)(s+3)}\times\frac{s+3}{s+2}$$

$$=\frac{2}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

经反变换得到零状态响应 $y_{zs}(t)=u(t)-2e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)$ （4 分）

$$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)$$

系统的全响应 $=u(t)-2e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)-e^{-t}u(t)+2e^{-3t}u(t)$ （2 分）

$$=u(t)-3e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)+2e^{-3t}u(t)$$

自由响应 $y_{fr}(t)=-2e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)$ （1 分）

强迫响应 $y_{fo}(t)=u(t)$ （1 分）

暂态响应 $y_{tr}(t)=-3e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)+2e^{-3t}u(t)$ （1 分）

稳态响应 $y_{st}(t)=u(t)$ （1 分）

四. 某带通系统的频率响应为 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{1+\mathrm{j}(\omega-1000)}+\dfrac{1}{1+\mathrm{j}(\omega+1000)}$。试求：（17 分）

1）该系统的单位冲激响应 $h(t)$；（6 分）

2）概画 $H(\mathrm{j}\omega)$ 的幅频响应特性曲线和相频响应特性曲线；（6 分）

3）假如系统的输入为 $x(t)=(1+\cos t)\cos(1000t)$，求系统的输出 $y(t)$。（5 分）

解：1）设 $H_0(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$，其傅里叶反变换为 $h_0(t)=e^{-t}u(t)$

则 $H(\mathrm{j}\omega)=H_0(\mathrm{j}\omega)*[\delta(\omega-1000)+\delta(\omega+1000)]$

根据频域卷积性质得到系统的单位冲激响应为

$h(t)=2\pi h_0(t)\times F^{-1}[\delta(\omega-1000)+\delta(\omega+1000)]$

由于 $\cos(1000t)\xrightarrow{\text{CTFT}}\pi[\delta(\omega-1000)+\delta(\omega+1000)]$

所以 $h(t)=2h_0(t)\cos(1000t)=2e^{-t}u(t)\cos(1000t)$ （6 分）

2）由于 $H(\mathrm{j}\omega)$ 的频谱是 $H_0(\mathrm{j}\omega)$ 进行频谱搬移的结果，所以可以先画出 $H_0(\mathrm{j}\omega)$ 的频谱。

$$H_0(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega},\quad |H_0(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}},\quad \varphi_0(\mathrm{j}\omega)=-\arctan(\omega)$$

$H_0(\mathrm{j}\omega)$ 是一个低通滤波器，频谱如图 4.1 所示。将 $H_0(\mathrm{j}\omega)$ 进行频谱搬移到中心频谱 $\omega_0(t)=\pm1000$ rad/s 处，得到 $H(\mathrm{j}\omega)$ 的频谱如图 4.2 所示。 （6 分）

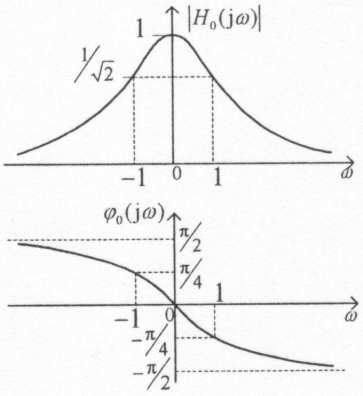


图 4.1

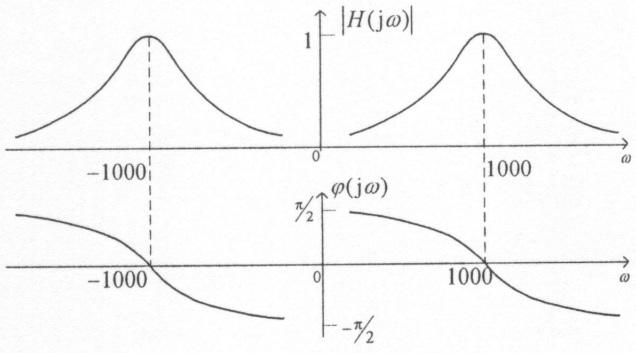


图 4.2

3）输入信号 $x(t)=(1+\cos t)\cos(1000t)$ 是窄带调幅信号，带通滤波器对窄带调幅信号的响应可以利用等效的低通滤波器对基带信号的处理结果，即先求低通滤波器在基带信号的 2 个频率点上的函数值：

$$H_0(\mathrm{j}0)=1,\quad H_0(\mathrm{j}1)=\frac{1}{1+\mathrm{j}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\mathrm{j}\pi/4}$$

带通滤波器的响应为：$y(t)=[1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t-\pi/4)]\cos(1000t)$ （5 分）

五．现欲对一个已知的 N 点序列 $x[n],0\le n<N$ 进行滤波处理，所用滤波器是系统函数为 $H(z)=\frac{2z+4.5+z^{-1}}{z+4.5+2z^{-1}}$ 的稳定系统。（25 分）

1）确定该滤波器所对应的差分方程，给出它的规范型实现方框图；（6 分）

2）画出 $H(z)$ 在 z 平面零极点分布和收敛域；（6 分）

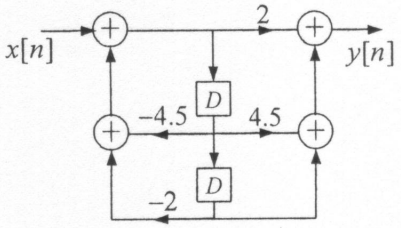
3）概画该滤波器的幅频响应特性曲线；（5 分）

4）假设 MATLAB 中存在一个函数 $y=\text{myfilter}(b,a,X)$，它能够实现对一维序列 X 按照向量 $b=[b(1)\ \ b(2)\ \cdots\ b(nb)]$ 和向量 $a=[a(1)\ \ a(2)\ \cdots\ a(na)]$ 所确定的因果稳定的滤波器 $H_0(z)=\frac{b(1)+b(2)z^{-1}+\ldots+b(nb)z^{-(nb-1)}}{a(1)+a(2)z^{-1}+\ldots+a(na)z^{-(na-1)}}$ 进行因果滤波。请问能否利用这个函数实现本题的滤波处理？如果能，请分析实现方法，并给出相应的处理过程。（8 分）

解：1）滤波器的系统函数 $H(z)=\frac{2z+4.5+z^{-1}}{z+4.5+2z^{-1}}=\frac{2+4.5z^{-1}+z^{-2}}{1+4.5z^{-1}+2z^{-2}}$，对应的差分方程为：

$$y[n]+4.5y[n-1]+2y[n-2]=2x[n]+4.5x[n-1]+x[n-2]$$ （2 分）

该滤波器的规范型实现方框图如图 5.1 所示。



（4 分）

图 5.1

2）$H(z)=\frac{2+4.5z^{-1}+z^{-2}}{1+4.5z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{(4+z^{-1})(0.5+z^{-1})}{(1+4z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$

它的两个零点为：$z=-0.25,z=-2$ （1 分）

两个极点为：$z=-4,z=-0.5$ （1 分）

由于该系统是稳定的系统，所以它的收敛域为：$0.5<|z|<4$ （2 分）

如图 5.2 所示。 （2 分）

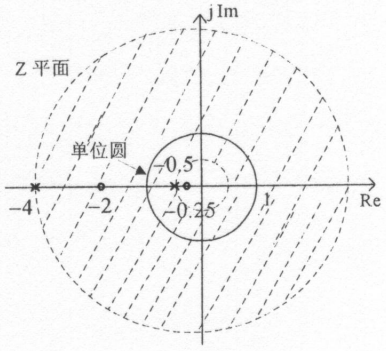


图 5.2

3）由于 $H(z)=\dfrac{4+z^{-1}}{1+4z^{-1}}\times\dfrac{0.5+z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}=\dfrac{4z+1}{z+4}\times\dfrac{0.5z+1}{z+0.5}$，它的零极点关于单位圆成反比例对称，可知它是一个全通系统。（2 分）

它的幅频响应特性曲线如图 5.3 所示。（3 分）

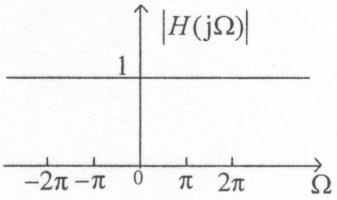


图 5.3

4）由 $H(z)=\dfrac{4+z^{-1}}{1+4z^{-1}}\times\dfrac{0.5+z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$ 及其收敛域 $0.5<|z|<4$ 可知 $H(z)=H_1(z)H_2(z)$

其中一个是因果系统：$H_1(z)=\dfrac{0.5+z^{-1}}{1+0.5z^{-1}},|z|>0.5$

另一个是反因果系统 $H_2(z)=\dfrac{4+z^{-1}}{1+4z^{-1}},|z|<4$（2 分）

要实现对一个已知序列进行反因果滤波，可以看成是从时间的反方向对该序列进行对应的因果滤波。反因果系统 $H_2(z)$ 得到对应的因果滤波器 $H_3(z)$，即

$$H_2(z)=\frac{4+z^{-1}}{1+4z^{-1}},|z|<4\xrightarrow{z^{-1}=z}H_3(z)=\frac{4+z}{1+4z}=\frac{1+4z^{-1}}{4+z^{-1}},|z|>\frac{1}{4}$$（2 分）

可以看出对应的 $H_3(z)$ 滤波器也是稳定的滤波器，为此可以利用这实现因果稳定滤波功能的函数 $y=\text{myfilter}(b,a,X)$ 来实现。总之，利用函数 $y=\text{myfilter}(b,a,X)$ 完成本题的滤波器 $H(z)$ 对 N 点序列 $x[n],0\le n<N$ 进行滤波的处理过程如下：（4 分）

第一步，调用函数 $y=\text{myfilter}(b,a,X)$ 实现 $H_1(z)=\dfrac{0.5+z^{-1}}{1+0.5z^{-1}},|z|>0.5$ 对 $x[n],0\le n<N$ 的滤波处理，得到 $y_1[n],0\le n<N$；

第二步，将序列 $y_1[n],0\le n<N$ 反转得到序列 $y_2[n]=y_1[N-1-n],0\le n<N$；

第三步，调用函数 $y=\text{myfilter}(b,a,X)$ 实现 $H_3(z)=\dfrac{4+z}{1+4z}=\dfrac{1+4z^{-1}}{4+z^{-1}},|z|>\dfrac{1}{4}$ 对序列 $y_2[n],0\le n<N$ 的滤波处理，得到 $y_3[n],0\le n<N$；

第四步，将序列 $y_3[n],0\le n<N$ 再次反转得到序列 $y[n]=y_3[N-1-n],0\le n<N$。

六. 现有一长度为 N 的序列 $\{x[n],n=0,1,...,N-1\}$。设 N 可以表达为两个正整数的乘积，即 $N=ML$，这里 M 和 L 分别为两个正整数。现欲求序列 $x[n]$ 的 DFT。为减少乘法运算量，要求将该 N 点 DFT 分解成为若干 M 点 DFT 和若干 L 点 DFT 进行运算。试求：（15 分）

1）推导出分解运算表达式；（10 分）

2）给出分解运算后的复数乘法运算量，并与直接计算 N 点 DFT 所需的复数乘法运算量作比较，给出你的结论。（5 分）

解：1）直接计算上述 N 点 DFT 的公式为 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},0\le k\le N-1$

已知 $N=ML$，故将 n 表达为：$n=n_1M+n_0$，其中 $0\le n_1\le L-1,0\le n_0\le M-1$

$$X(k)=\sum_{n_0=0}^{M-1}\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1M+n_0)W_N^{k(n_1M+n_0)}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{M-1}W_N^{kn_0}\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1M+n_0)W_N^{kn_1M}=\sum_{n_0=0}^{M-1}W_N^{kn_0}\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1M+n_0)W_L^{kn_1}$$

然后，将 k 表达为：$k=k_1L+k_0$，其中 $0\le k_1\le M-1,0\le k_0\le L-1$

并利用关系：$W_N^{(k_1L+k_0)n_0}=W_M^{k_1n_0}\cdot W_N^{k_0n_0}$，$W_L^{(k_1L+k_0)n_1}=W_L^{k_0n_1}$

带入上式，可得：$X(k_1L+k_0)=\sum_{n_0=0}^{M-1}[W_N^{k_0n_0}\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1M+n_0)W_L^{k_0n_1}]W_M^{k_1n_0}$

所以，$X(k)$ 可分解为 M 个 L 点 DFT 和 L 个 M 点 DFT。（10 分）

2）乘法运算量估计如下：

假设完成一个 L 点 DFT 需要 L^2 次复数乘法，完成一个 M 点 DFT 需要 M^2 次复数乘法，加上中间结果处理的 N 次复数乘法，分解后的复数乘法运算量为：

$$M\cdot L^2+L\cdot M^2+N=N(L+M+1)$$

而直接计算 N 点 DFT 的乘法运算量为 N^2。一般情况下都有，$N>L+M$。所以，分解后的乘法运算量要低于直接计算。（5 分）

七. 用窗函数法设计具有线性相位特性的 FIR 低通滤波器，系统采样频率为 40kHz。滤波器的幅度特性要求为：通带截止频率 10kHz，过渡带宽为 2kHz，带外最小衰减不低于 50dB。试求：（15 分）

1）根据设计指标要求在下表中选择最佳的窗函数，导出滤波器阶数 N。（7 分）

2）若采用窗函数 $w[n]$，且已经确定滤波器阶数为 N，试导出该滤波器的单位冲激（或单位取样）响应 $h[n]$ 表达式。（8 分）

参考窗函数表

窗函数	主瓣宽度	旁瓣电平	最小阻带衰减
矩形窗：$w[n]=1,\quad n=0,\cdots,N-1$	$4\pi/N$	−13dB	21dB
三角形窗：$w[n]=\begin{cases}\dfrac{n}{N/2}, & n=0,\cdots,\dfrac{N}{2}\\ \dfrac{N-n-1}{N/2}, & n=\dfrac{N}{2}+1,\cdots,N-1\end{cases}$	$8\pi/N$	−25dB	25dB
Hanning 窗：$w[n]=\sin^2(\dfrac{\pi}{N}n),\quad n=0,\cdots,N-1$	$8\pi/N$	−32dB	44dB
Hamming 窗：$w[n]=0.54-0.46\cos\dfrac{2\pi}{N}n,\quad n=0,\cdots,N-1$	$8\pi/N$	−42dB	53dB
Blackman 窗：$w[n]=0.42-0.5\cos\dfrac{2\pi}{N}n+0.08\cos\dfrac{4\pi}{N}n,\quad n=0,\cdots,N-1$	$12\pi/N$	−57dB	74dB

解：1）根据滤波器带外衰减大于 50dB 的要求，选择 Hamming 窗。（如选择 Blackman 窗也可，但不是最优选择，可酌情给分）

滤波器阶数 N 由 Hamming 窗的主瓣宽度确定，计算如下：

系统要求过渡带宽为 2kHz，其数字域频率为

$$\Delta\omega = \frac{\Delta f}{f_s} 2\pi = \frac{2000}{40000} 2\pi = 0.1\pi$$

Hamming 窗的主瓣宽度为 $8\pi/N$，故

$$N = \frac{8\pi}{\Delta\omega} = \frac{8\pi}{0.1\pi} = 80 \qquad \text{（7 分）}$$

2）理想低通的频域特性为：$H_d(e^{j\omega}) = 1$，$-\omega_c \le \omega \le \omega_c$，则

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{\sin\omega_c n}{\pi n} \qquad -\infty < n < \infty \end{aligned}$$

这里 $\omega_c = \frac{f_c}{f_s} 2\pi = \frac{10000}{40000} 2\pi = 0.5\pi$

把 $h_d(n)$ 右移 $\frac{N}{2} = \frac{80}{2} = 40$ 个采样点，并用 80 阶 Hamming 窗 $w(n)$ 截取，得

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{\sin\omega_c(n-\frac{N}{2})}{\pi(n-\frac{N}{2})}(0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi}{N}n) \qquad \text{（8 分）} \\ &= \frac{\sin 0.5(n-40)}{n-40}(0.54 - 0.46\cos\frac{\pi}{40}n), \qquad 0 \le n \le 39 \end{aligned}$$